

太陽硬 X 線の地球大気中における伝搬

小倉絃一*・小玉正弘**

Propagation of the Hard Solar X-Rays in the Atmosphere

Kōichi OGURA* and Masahiro KODAMA**

Abstract: This report briefly summarizes preliminary results of the Monte Carlo calculations in order to simulate the propagation of the hard solar X-rays in the atmosphere. The simulated results were compared quantitatively with the data of the hard solar X-ray event of February 11, 1970, which was observed simultaneously at balloon and satellite altitudes.

According to these comparisons, the results simulated from the satellite data are well consistent with the balloon data at the time of peak intensity, but show higher fluxes by factor of 7 at maximum in the decaying phase of the event about 1 minute before the sunset for the satellite.

These suggest that the satellite-borne X-ray detector recorded a considerable amount of atmospheric scattered photons with primary solar X-rays at a time just before the sunset.

要旨: 太陽硬 X 線の地球大気中における伝搬についてモンテカルロ計算でシミュレートした。その結果を1970年2月11日の太陽硬 X 線バーストに関する気球と衛星の同時観測例と比較した。その結果を概報する。

シミュレーションの結果は、太陽硬 X 線イベントのピーク強度時には気球の観測値とよく合っているが、衛星の日没前約1分間の気球の観測値との間にはかなりのずれ(最大のときで、7倍もシミュレーション値の方が大きい)がある。このずれは、日没前の衛星の X 線検出器が1次 X 線のほかに、地球大気で散乱した2次 X 線のかなりの量を観測していたために生じたと思われる。

1. はじめに

地球大気頂に入射した太陽 X 線や銀河 X 線、または大気上層部で発生したオーロラ X 線などを気球高度で観測した場合、観測された X 線は大気の原子、分子による散乱や吸収によりかなり変調されたものになっている。したがって、気球高度の観測から大気頂または発

* 日本大学生産工学部. College of Industrial Technology, Nihon University, 24-1, Narashinodai 7-chome, Funabashi 274.

** 理化学研究所. The Institute of Physical and Chemical Research, 7-13, Kaga 1-chome, Itabashi-ku, Tokyo 173.

生層での X 線のエネルギースペクトルを求めるには、大気頂から X 線が観測された高度までの大気の厚さを考慮した補正が必要である。そのためには X 線の大气中における伝搬の様子を知る必要があるが、これを解析的に取り扱うのは難しい。しかし、物質中の X 線の透過・散乱現象はまったく確率論的な問題であるから、大气中の X 線の振舞はモンテカルロ法によりシミュレートすることができる。

いままでにも、大气中の硬 X 線透過のモンテカルロシミュレーションは行われており、たとえばオーロラ X 線 (PILKINGTON and ANGER, 1971) や銀河 X 線に関して (HORSTMAN *et al.*, 1977) などがある。しかし、シミュレーション結果について、衛星もしくはロケット高度と気球高度で同時に観測されたデータに照らした評価はなされていない。

そこで、新たにモンテカルロ計算コードを作製し、シミュレートした結果を太陽硬 X 線の観測データで評価して、硬 X 線の大气透過問題の把握とモンテカルロコードの確立を試みた。

2. 太陽硬 X 線バーストの観測結果の概要

1970年2月11日に発生した class 2B の太陽フレアに伴う太陽硬 X 線バーストが、人工衛星 (OSO-5) と気球 (7 mb 高度, 太陽天頂角 60° , 昭和基地) で同時に観測された (KODAMA *et al.*, 1971; OGURA *et al.*, 1971)。観測に用いられた衛星の X 線検出器は面積 71 cm^2 の CsI (Na) シンチレーションカウンターで、その視野は 40° (FWHM) である (FROST, 1969)。一方、気球の検出器は直径 2 インチ、厚さ 0.5 インチの全方向性をもつ NaI(Tl) シンチレーションカウンター (小玉・小倉, 1969) である。両者で同時に観測された太陽硬 X 線のエネルギーは、25 keV から 200 keV の同じ領域に渡っている。その中から、衛星と気球の低エネルギーチャンネルで観測された X 線強度の時間的な変動を図 1 に示す。図 1 にみられる 0706:40 UT 前後の X 線強度のピークは、観測されたエネルギー全域について存在する。また、気球観測中の太陽の天頂角は 60° であったが、衛星は 0708:18 UT に日没になった。そのため、衛星で観測された太陽硬 X 線強度は、その時刻から急激に減少し、気球で観測された 0708:40 UT の 2 番目の小さなピークは、衛星では観測されていない。

この太陽硬 X 線の同時観測は広いエネルギー範囲で、しかも、同種の検出器によりなされているから、硬 X 線の大气中の透過問題を検討するにはまたとない観測例である。そこで、衛星の観測データをもとにモンテカルロシミュレーションを行い、気球の観測値と比較検討した。

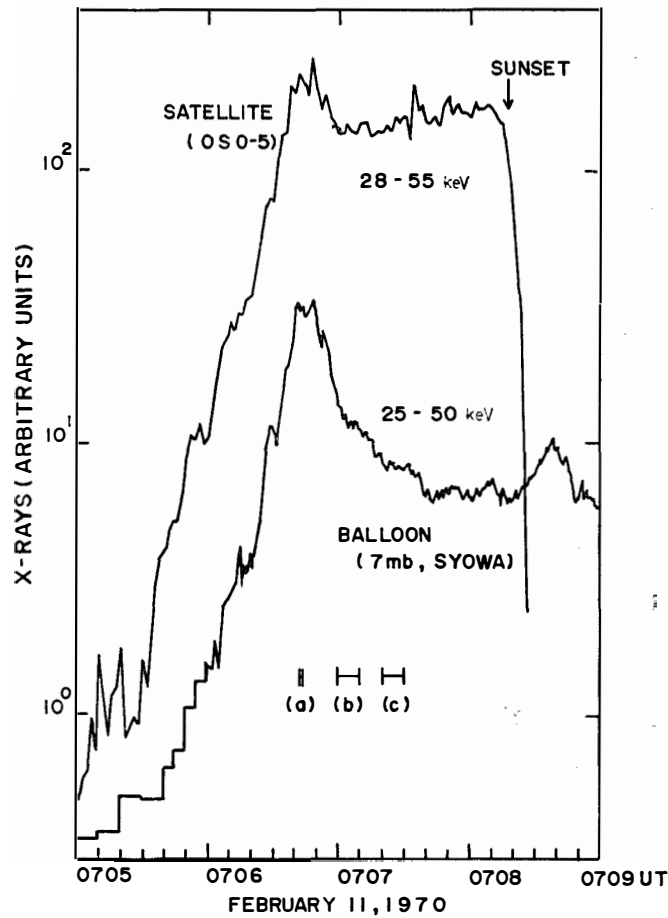


図1 人工衛星および気球高度で観測された太陽硬 X 線強度の時間変化. 図中の (a), (b), (c) の各時刻のエネルギースペクトルが, 図3および図4 (a), (b) にそれぞれ示してある.

Fig. 1. Intensity-time profiles of the hard solar X-ray burst observed simultaneously at the balloon and satellite altitudes. Energy spectra of X-rays, at the time (a), (b) and (c) indicated in the lower part of the figure, are shown in Fig. 3, Fig. 4(a) and Fig. 4(b), respectively.

3. モンテカルロ計算

シミュレーションは, 衛星で観測された太陽硬 X 線のエネルギースペクトル (通常, 大気外のスペクトルと同じと考える) と同じスペクトルの X 線束を, 大気頂に天頂角 60° で入射させて行った. 入射方位角は気球の検出器が全方向性をもつので任意に選べるが, ここでは 90° とした. また, 気球の X 線検出器の検出効率 は 25 keV から 250 keV の間で100% とし, 有効面積は検出器に入射する光子の天頂角のみに依存するものとした.

以上の条件のもとに、大気の深さ 7 g/cm^2 のところでの太陽硬 X 線のエネルギースペクトルがイベント中の 0706:00 UT から 0708:26 UT にかけてシミュレートされた。

シミュレーションの結果について言及する前に、計算に使用したモンテカルロコードについて簡単に述べる。

計算コード作製に際し、地球大気を以下のように仮定した。

- (1) 地表高度 100 km を大気頂にみなし*、その下に平行平面な大気層を考える。
- (2) 大気組成は高度によらず一様で、重量比で 75.5% N, 23.2% O, 1.3% A とする。
- (3) 地表高度 h (km) と大気の深さ d (g/cm^2) の関係を、ARDC model atmosphere, 1959 (MINZNER *et al.*, 1959) の値に近似して、次のように求めた。

$$h = 7.9 \ln(480/d) + 0.068 d, \quad 0.1 \leq d \leq 50$$

$$= 5.65 (9.56 - \ln d), \quad d < 0.1$$

つぎに、光子と大気との相互作用について考える。ここでは、250 keV 以下の硬 X 線を取り扱うため、次の3つの衝突過程だけを考える。(1) 光電吸収、(2) Compton 散乱、(3) Rayleigh 散乱、また、(1)、(2) の過程でたたき出される電子の制動放射による2次 X 線は放射確率が小さく、放射されてもその大部分はエネルギーが低いため無視できる。

以上のことを考慮の上、大気頂に原点を置き、地球中心方向に Z 軸をとる直角座標系で光子の動きを追跡するモンテカルロ計算の論理的フローチャートを図2に示す。図中の R は乗算型合同法により、0 ~ 1 の一様乱数を発生させたことを意味する。

光子の history は、図2で示した source routine であらかじめ定められている天頂角と方位角、そしてエネルギースペクトルに従った入射エネルギーの光子が発生し、大気頂の座標原点に入射して始まる。以後、図2に示したように、光子の history が乱数により次の順序で決定されていく。

- (1) 衝突の位置
- (2) 衝突は吸収か散乱か
- (3) Compton 散乱か Rayleigh 散乱か
- (4) 散乱後の光子のエネルギーと進行方向

もし、(1) と (2) の間で光子が気球のある大気の深さを透過すれば、その時の光子のエネルギー、天頂角、方位角、座標および入射時のエネルギーが記録される。

* 大気頂に天頂角 60° で入射した 20 keV の光子の 99.98% は直接 100 km の高さまで透過してくる。

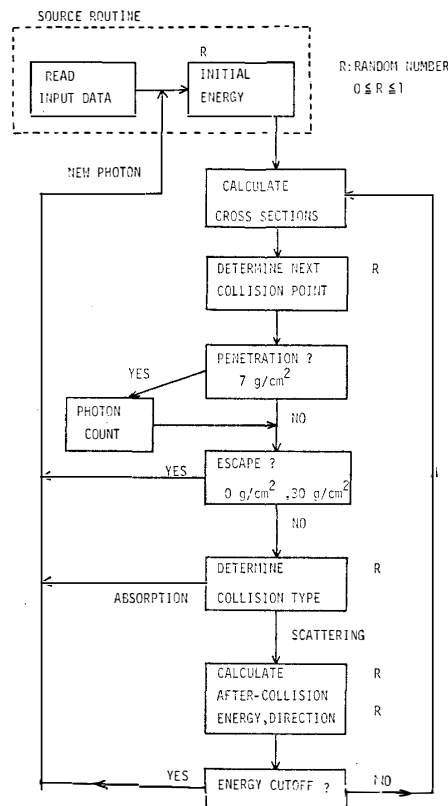


図 2 モンテカルロ計算の論理的フローチャート

Fig. 2. Monte Carlo logical flow diagram of the penetration of X-rays through the atmosphere.

そして、光子は次の (1)-(4) のいずれかの場合にその history を終え、次の新しい光子が発生する。

- (1) 光電吸収を受ける
- (2) 大気外に逃げ去る
- (3) 大気の深さ 30 g/cm² を透過してしまう
- (4) エネルギーが 15 keV 以下に落ちる。

なお、計算に用いた主な数式については appendix で述べる。

4. シミュレーションと観測の比較

4.1. ピーク強度時の評価

ピーク時の 1 例として、図 1 の中で (a) で示した時刻 0706:42-44 UT に観測された衛星と気球でのエネルギースペクトルを図 3 に示す。衛星のスペクトルは 82 keV 以下で $E^{-2.2}$ 、それ以上で $E^{-5.4}$ のべき関数型を示している。そこで、モンテカルロ計算では光子のエネルギー

を 22-82 keV と 82-250 keV の 2 つのエネルギー領域に分け、それぞれ 2000 個ずつの光子に衛星と同じエネルギースペクトルをもたせてシミュレーションを行った。

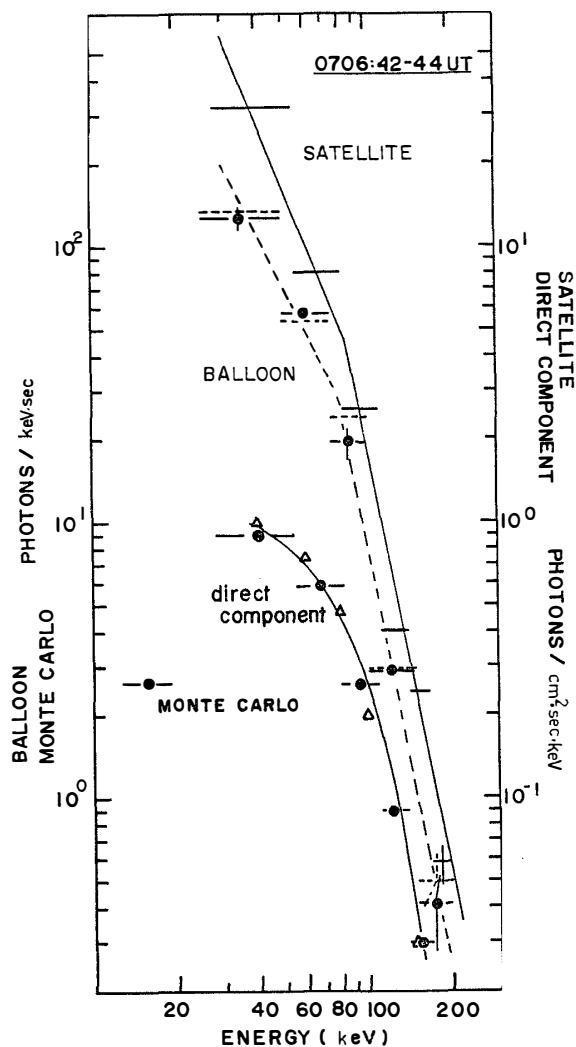


図 3 X 線バーストのピーク強度時、0706:42-44 UT (図 1 の (a) で示した時刻) における観測およびシミュレートされた X 線の微分エネルギースペクトル。下方の曲線は気球高度での直接成分のエネルギースペクトル。——衛星の観測値、-----気球の観測値、—●—シミュレーション、△ 大気頂から $14 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ の空気中の path を考慮して、衛星データから解析的に求めた直接成分。

Fig. 3. Observed and simulated differential energy spectra of the hard solar X-rays at the peak of the burst between 0706:42 UT-0706:44 UT (at the time (a) indicated in Fig. 1). Solid and dashed lines correspond respectively to the satellite and balloon observations. Solid circles indicate the simulated flux at $7 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ atmospheric depth. Solid circles and open triangles in the lower part of the figure show the direct components which were deduced from the satellite data by means of simulations and analytical calculations respectively, taking into account $14 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ path of air.

その結果のエネルギースペクトルがやはり図 3 に示してあるが、気球で観測されたスペクトルと一致することがわかる。

一方、大気頂から一度も散乱を受けずに 14 g/cm^2 の空気の厚さを通ってくる直接成分は衛星の観測値から指数減衰則により簡単に計算できる。その結果とシミュレートされた直接成分のエネルギースペクトルが同じく図 3 に示してある。両者はよく一致しており、モンテカルロコードの妥当性を証明している。

気球高度で観測される X 線強度は直接成分に散乱成分が重畳したものであるが、図 3 にみられるように、気球で観測された X 線の大部分が散乱成分であったことが、直接成分との比較からわかる。ちなみに、エネルギー別にビルドアップ係数を求めると表 1 のようになり、エネルギーが低くなるとともに散乱成分の寄与が大きくなる様子がよくわかる。

気球高度で観測された X 線の大部分が散乱 X 線だとすると、それらのエネルギーは、多重散乱により衛星高度でもっていたエネルギーより低くなっている。そこで、気球で観測されたエネルギーと衛星高度のエネルギーの対応をつけるために、シミュレートされた気球の

表 1 エネルギースペクトルから求めた大気の深さ $7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-2}$ のところでのエネルギー別のビルドアップ係数

Table 1. Build-up factor of different energies at $7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-2}$ atmospheric depth deduced from energy spectra in Fig. 3.

40 keV	50 keV	80 keV	100 keV	150 keV
7.5	5.4	4.0	2.3	1.8

表 2 気球のそれぞれのエネルギーチャンネルに衛星の各チャンネルから落ち込んでくる光子の比率

Table 2. Ratio of direct and energy degraded photons from each energy channels of satellite to total photons in each of balloon channels.

Primary spectrum	$E^{-2.2}$		$E^{-5.4}$					
	Satellite (keV)	Balloon (keV)	28-55	55-82	82-111	111-141	141-168	168-200
25-50			0.68	0.18	0.04	0.005	0.002	0.0005
50-75			0.11	0.65	0.20	0.02	0.01	0.002
75-100				0.29	0.61	0.06	0.04	0.006
100-150					0.35	0.39	0.22	0.04
150-200							0.56	0.43

各エネルギーチャンネルの光子が、衛星のどのエネルギーチャンネルから落ちてきているかを調べた。気球のそれぞれのチャンネルについて、落ち込み光子の全光子数に対する割合を表2に示す。入射 X 線のエネルギースペクトルがソフトなため、各チャンネルとも表2にみられるように、気球で観測されるエネルギーとほぼ同じ入射エネルギー域からの光子の寄与が大きいことがわかった。したがって、図3のように衛星と気球のエネルギースペクトルが、ほぼ同じ型をしていることになる。

4.2. シミュレーションによる観測値全般の評価

太陽硬 X 線のエネルギースペクトルはイベント中で刻々と変化しているため (KODAMA *et al.*, 1971), スペクトルに従ったシミュレーションを逐一行うと計算量が多くなる。そこで、大気頂にフラットなスペクトル (20 keV–200 keV) で入射した2000個の光子について、その気球高度でのエネルギースペクトルをまずシミュレートしておく。この結果に衛星の観測値で重みをつけ、実際のスペクトルをシミュレートする方法を用いた。

図1の (a), (b) で示した時刻 0707:00–10 UT と 0707:30–40 UT について、シミュレートした気球高度でのエネルギースペクトルを衛星と気球のスペクトルとともに図4 a, b に示す。しかし、ピーク時 (図3) と異なり、図4 a, b いずれの場合も、気球の観測値とシミュレーションが一致していない。また、その差異は図4 a より図4 b の時刻の方が大きくなっている。

そこで、0706:00 UT から 0708:26 UT にかけて、衛星の X 線計数率 N_S からシミュレートした 7 g/cm^2 の大気の深さでの計数率 N_M と気球で観測された計数率 N_B の比 N_M/N_B を求めてみた。ただし、 N_S, N_B の値は 0708:20 UT 以前では10秒間の平均値で、それ以降は2秒間の平均値を用いた。 N_M/N_B の時間変化を 25–50 keV と 50–100 keV について、 N_S, N_B とともに図5に示した。

まず、衛星と気球の観測値を図5でみると、0707 UT 頃まではほぼ同じタイムプロファイルをみせているが、それ以降から両者は異なった傾向を示している。つまり、0707 UT から日没までの間に N_S は 28–55 keV でわずかずつ増加し、55–111 keV ではほぼ一定の値を示している。一方、 N_B はいずれのエネルギー域でも、計数率が徐々に減少していき、0707:40 UT 頃から平らになるタイムプロファイルをもっている。これに対応させて、図5で N_M/N_B の変化をみると、0706 UT から 0707 UT までは $N_M/N_B \approx 1$ であるから、シミュレーションと観測の一致を示す。しかし、それ以降から $N_M/N_B > 1$ の傾向が表れ、時間とともに N_M と N_B の差が広がっていく。また、この差異は 50–100 keV の方が 25–50 keV より

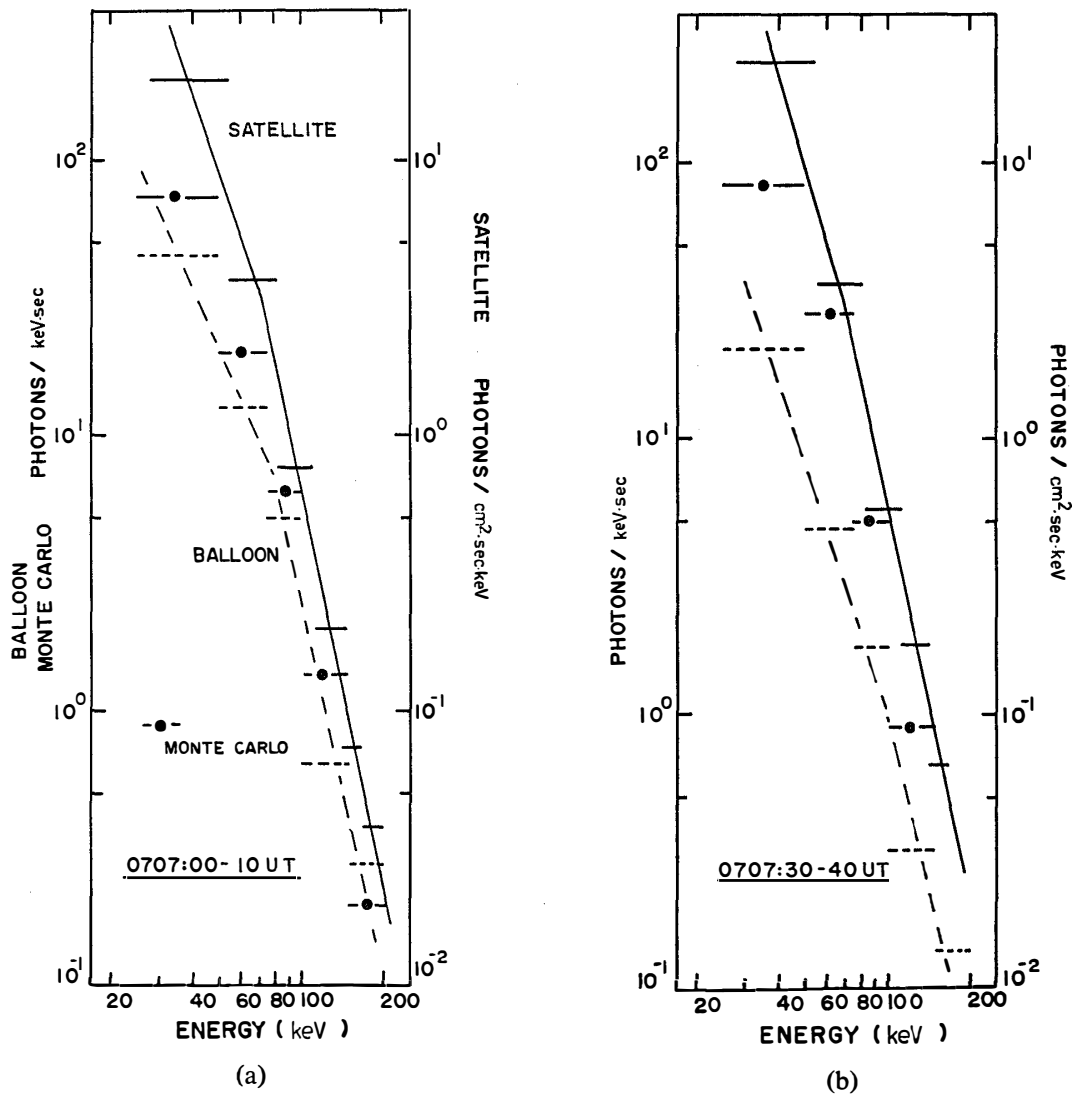


図 4 観測およびシミュレートされた X 線の微分エネルギースペクトル。——衛星の観測値，-----気球の観測値，—●—シミュレーション。
 (a) 0707:00-0707:10 UT (図 1 の (b) で示した時間)
 (b) 0707:30-0707:40 UT (図 1 の (c) で示した時間)

Fig. 4. Differential energy spectra of X-rays in the decaying phase of the burst. Solid and dashed lines correspond respectively to the satellite and balloon observations. Solid circles indicate the simulated flux at $7 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ atmospheric depth.
 (a) 0707:00-0707:10 UT (at the time (b) indicated in Fig. 1).
 (b) 0707:30-0707:40 UT (at the time (c) indicated in Fig. 1).

大きい，100 keV 以上のエネルギーになると，最大でも $N_M/N_B \sim 2$ の程度であった。

もし， N_M/N_B が 1 より大きくなる原因が気球側にあるとすると，気球高度の低下，もしくは測定器の変調による N_B の減少が考えられる。しかし，次の点でその可能性は低い。

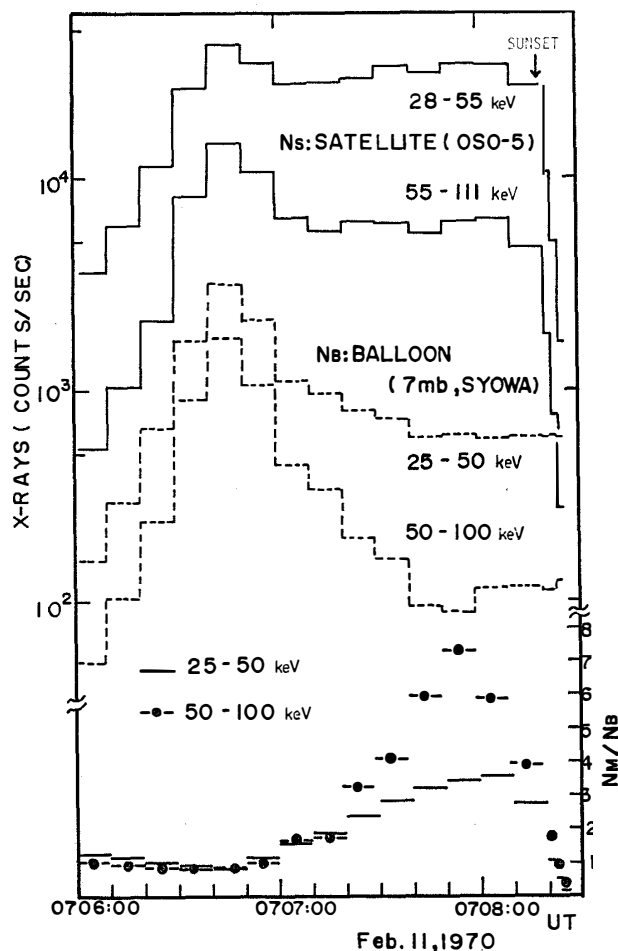


図 5 衛星と気球高度で観測された太陽硬 X 線の計数率 (10秒平均) の時間変化と気球高度でのシミュレーションと観測された計数率, N_M と N_B の比の時間変動.

Fig. 5. Time profiles of counting rates of X-rays (10-sec mean) in four different energy ranges at the satellite and balloon altitudes: — 28-50 keV, 55-111 keV for the satellite (N_S), ---- 25-50 keV, 50-100 keV for the balloon (N_B). In the lower part of the figure, time variations of ratios of simulated counts (N_M) to observed (N_B) at the balloon altitude in two different energy ranges: — 25-50 keV, —●— 50-100 keV. The ratio represents a kind of build-up factor of satellite observation.

- 1) イベント前後のバックグラウンド強度に変化がなかった。
- 2) 図 1 で 0708:40 UT にみられる小さなピークと太陽電波の観測との対応が良い (KODAMA *et al.*, 1971).
- 3) 気球高度の低下だとすると, 1), 2) を説明するにはわずか 1 分間で高度が大きく上下したことになるが, これは考え難い。

一方, 衛星の方は 0708:18 UT に地球の陰に入っている。日没前の衛星は, 相当な量の地球大気を通して太陽を見ていたことになる。衛星の検出器はかなり広い視野 (40° FWHM)

を持っているから、太陽からの 1 次 X 線のみでなく、大気で散乱されたアルベド X 線も観測した可能性がある。そこで、図 5 の N_M/N_B のタイムプロファイルを次のように解釈した。

まず、0707 UT までの衛星の観測値は 1 次 X 線強度そのものであったとする ($N_M/N_B=1$)。それ以降から、アルベド X 線の影響が出てきたとすると、 $N_M/N_B>1$ になってくる。さらに、衛星が動くにつれて、検出器の見込む大気の量が増えるため、散乱 X 線のビルドアップが深まり、 N_M/N_B の値が大きくなっていく。そして、日没直前では、衛星は大気の深い層を通して太陽を見るため、大気による X 線の吸収が大きくなる。そのため、観測される X 線は直接成分はもちろんのこと、散乱成分も減少し、0708 UT 以降では N_M/N_B の値が減ってくる。また、 N_M/N_B の値は 50-100 keV のエネルギー域の方が 25-50 keV より大きい傾向があるが、これは 50 keV 以上の X 線に対しては光電吸収より Compton 散乱の方が卓越しているためと思われる。

もし、日没前の衛星で観測された X 線強度が 1 次 X 線と散乱 X 線の重畳したものなら、 N_M/N_B は衛星でのビルドアップ係数のような意味をもってくる。いいかえれば、日没前約 1 分間にわたり衛星が見た地球大気は太陽からの 1 次 X 線より数倍も明るい散乱 X 線で輝いていたことになる。

5. お わ り に

モンテカルロ計算の試行光子数は十分ではないが、作製した計算コードが大気中の硬 X 線透過のシミュレーションに十分役立つことが、太陽硬 X 線の実測例に照らして判明した。今後は、種々の物理的、幾何学的な条件で観測される気球高度の X 線データの解析の一助とすべく、ビルドアップ係数のような補正係数を初期条件を変化させてシミュレートする必要がある。また、大気中の X 線の空間的な拡がりの把握は、たとえばオーロラ X 線のデータ解析上欠くことができない。

シミュレーションと太陽硬 X 線の観測値を比較した結果、大気の掩蔽効果のため太陽硬 X 線が散乱を受け、あたかも X 線ジオコロナのように地球大気周辺が散乱 X 線で輝いている中を、日没直前の衛星が動いていたらしいことが推論された。もし、これが事実とすれば、1970年 2月11日の太陽硬 X 線バーストの気球と衛星の同時観測は非常に珍しい、興味ある観測例になる。詳しくは、正確な衛星軌道を入手して、モンテカルロ計算による定量的な解析に待たねばならぬことは言うまでもない。

おわりに、モンテカルロコード作製から解析に至るまで多大の助言をいただいた日本大学

玉井英次教授はじめ境孝祐博士ならびに加藤正人氏に深く感謝します。

文 献

- CASHWELL, E. D. and EVERETT, C. J. (1959): A Practical Manual on the Monte Carlo Method for Random Walk Problems. London, Pergamon Press, 94-100.
- DAVISSON, C. M. (1966): Gamma-ray attenuation coefficients. Alpha-, Beta-, Gamma-Ray Spectroscopy, 1, ed. by K. SIEGBAHN. Amsterdam, North-Holland, 827-843.
- FESSLER, T. E. and WOHL, M. L. (1961): Monte Carlo studies of gamma-ray and neutron transport in infinite homogeneous media. NASA TN D-850.
- FROST, K. J. (1969): Rapid fine structure in a burst of hard solar X-rays observed by OSO-5. Astrophy. J., 158, L159-L163.
- HORSTMAN, H., BASSANI, L. and HORSTMAN-MORETTI, E. (1977): Effect of multiple scattering on balloon observation of γ -ray bursts. Astrophy. Space Sci., 52, 265-269.
- 小玉正弘・小倉紘一 (1969): 気球搭載用オーロラ X 線測定器. 理化学研究所報告, 45, 25-33.
- KODAMA, M., KUSUNOSE, M. and OGURA, K. (1971): Characteristics of the energetic solar X-ray burst of 11 February 1970 observed at balloon altitude. Rep. Ionos. Space Res. Jpn., 25, 285-300.
- MINZNER, R. A., CHAMPION, K. S. W. and POND, H. L. (1959): The ARDC model atmosphere, 1959. Airforce Surveys in Geophysics, 115.
- OGURA, K., FROST, K. J. and KODAMA, M. (1971): Comparison of the hard solar X-ray burst of February 11, 1970 observed at balloon and satellite altitudes. Paper SOL-1, 12th Inter. Conf. on Cosmic Rays, Hobart, Conference Papers, 2, 432-436.
- PILKINGTON, G. R. and ANGER, C. D. (1971): A Monte Carlo analysis of the passage of auroral X-rays through the atmosphere. Planet. Space Sci., 19, 1069-1085.

(1979年5月31日受理)

Appendix

モンテカルロ計算に用いた主な数式の説明をしておく。ただし、以下の記述では光子のエネルギーは電子の静止エネルギーを単位に測ったものとする。

1. 光子の空気に対する質量減衰係数

大気中の光子の衝突の確率や透過距離を求めるには、光子の空気中での質量減衰係数を知る必要がある。いま、光電効果、Rayleigh 散乱そして Compton 散乱の質量減衰係数をそれぞれ μ_P , μ_R , μ_C とすると、全質量減衰係数 μ_T は

$$\mu_T = \mu_P + \mu_R + \mu_C$$

で与えられる。もちろん、これらの係数は光子のエネルギー E と物質の種類に依存する。そこで、窒素、酸素およびアルゴンに対する衝突断面積 (DAVISSON, 1965) を用い、大気組

成を考慮して、10 keV から 300 keV の光子の空気中の μ_P , μ_R , μ_C を計算した。その値に fit させた近似式を次に示す。

$$\mu_P = 1.151 \times 10^{-5} E^{-3.294}.$$

$$\mu_R = 1.8 \times 10^{-4} E^{-1.81}.$$

$$\mu_C = a(0.2419 + E + 0.05641E^2)^{-1/2} \quad a = 0.09855$$

ただし、 μ_C を与える近似式は FESSLER *et al.* (1961) が γ 線のエネルギー域で用いたが、ここでは、係数 a の値を 100 keV の光子の μ_C の値で規格化して求めた。

2. Compton 散乱後の光子のエネルギーと進行方向

エネルギー E の光子が Compton 散乱を受けた後のエネルギー E' と散乱角 ϕ の間には、

$$\cos\phi = 1 + 1/E - 1/E'$$

の関係があり、 E' もしくは ϕ のいずれかが決まれば他方は簡単に求まる。一方、光子の散乱確率は、いわゆる Klein-Nishina の式と呼ばれる微分散乱断面積と全断面積との比で表されているから、これを乱数 R と等しいと置く。しかし、これから E' もしくは ϕ を解析的に求めるのは困難である。

そこで、散乱前の光子のエネルギー E を 2 つの範囲にわけて、 E' もしくは ϕ を以下のごとく近似的に求めた。

(1) 10 keV < E < 100 keV のとき

数十 keV 程度のエネルギーでは、Compton 散乱は Thomson 散乱で近似できるから、まず Thomson 散乱の散乱角を求めておき、それにエネルギー E による補正を加えた。その結果

$$\phi = \cos^{-1}(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}) - R(1-R)(220E + 5.0).$$

$$\alpha = \frac{1}{2}[-(8R-4) + \sqrt{(8R-4)^2 + 4}]$$

$$\beta = \frac{1}{2}[-(8R-4) - \sqrt{(8R-4)^2 + 4}]$$

(2) 100 keV $\leq E \leq$ 300 keV のとき

CASHWELL and EVERETT (1959) による近似式を参考にして、

$$E' = E[1 + S \cdot R + (2E - S)R^3]^{-1} + (0.0043 - 0.17E)R^2(1 - R^2).$$

$$S = E(1 + 0.5E)^{-1}$$

の近似式を得た。その結果、近似による誤差は (1) の場合、50 keV の光子で最大でも角度で 0.5° 、エネルギーにして 0.01 keV であり、(2) の場合は、150 keV の光子でそれぞれ 0.8° と 0.2 keV にしかならない。