

グラフィックディスプレイを用いた 会話型スペクトル解析システム

岩淵美代子*・藤井良一*・内海達郎**

Conversational System of Spectrum Analysis by the Use of Graphic Display

Miyako IWABUCHI*, Ryoichi FUJII* and Tatsuro UTSUMI**

Abstract: The spectral analysis system was made by the use of the computer HITAC M-160 II and the graphic display terminal, in order to analyze efficiently various kinds of wave data observed by Antarctic research, such as magnetic pulsations, natural electromagnetic waves, seismological waves and meteorological phenomena. The largest merit of the system is that it can analyze one- or two-dimensional time series data trial and error by the use of graphic display terminal. From the long original data one can choose easily a part of data for analysis, and freely use several kinds of filters and spectral methods. Generally used spectral methods, Blackman-Tukey, Fast Fourier Transform and Maximum-Entropy Method and the Chebyshev-filters, high-pass, low-pass, band-pass and band-reject are usable.

In this paper, the system is outlined, and the spectral and filtered results of the test data are given and discussed.

要旨: 南極観測で得られた各種波動データ(地磁気脈動, 自然電磁波, 地震波, 気候諸変動等のデータ)を効率よく解析するために, 国立極地研究所の電子計算機 M-160 II およびその周辺機器であるグラフィックディスプレイ端末を利用した会話型スペクトル解析システムの開発を行った。このシステムの特徴は, (1) ディスプレイ上のデータを見ながら自由に解析区間を選べること, (2) スペクトル解析機能およびその前処理としてのフィルター処理機能を有し, 結果を見ながら何回でも繰り返し行えること, (3) 表示の種類が豊富で必要に応じていつでもハードコピーがとれること等である。1次元および2次元データを対象とし, スペクトル解析の手法としては, Blackman-Tukey 法, FFT 法, MEM 法を, フィルターとしては, チェビシェフの high-pass, low-pass, band-pass および band-reject を用意した。

ここでは, システムの概要とテストデータに対するスペクトル解析結果およびフィルター結果を示し, その検討を行う。

* 国立極地研究所. National Institute of Polar Research, 9-10, Kaga 1-chome, Itabashi-ku, Tokyo 173.

** ファコムハイタック株式会社. Facom-Hitac Co. Ltd., 3-1, Kudan 2-chome, Chiyoda-ku, Tokyo 102.

1. はじめに

南極で観測されたデータの中には、地磁気脈動、自然電磁波、地震波、気候諸変動等のように、その時間スケールや波の性質は違っていても、いわゆる定常時系列のスペクトル解析の対象となるデータが多い。しかしそれらのデータの多くは、アナログ磁気テープやチャート紙などにアナログ量で記録されている場合が多く、いったんデジタル化された後もチャート紙と照らし合わせてめざす解析区間を決めるなど、その処理は繁雑なものとなる。また、定常時系列のスペクトル解析の方法も、**Blackman-Tukey** 法、高速フーリエ変換法および **Maximum-Entropy** 法とその種類は多く、一概にどれが最上であるとはいえないのが現状のようである。これは実際の時系列が完全な定常時系列ではなく、また有限長のデータしか得られないことによるもので、時系列の性質と解析の目的とを鑑みて、最も適した解析手法をある程度経験的に選んで行く方法がとられている。

このように膨大な量で、しかも異なる性質を持つ各種時系列データの解析に際しては、**AD** 変換、解析データの選択、スペクトル解析手法の選択などを効率よく行うための一貫したシステムをつくるのが非常に望ましいと思われる。これは南極のデータに限らず、一般の時系列データの解析についてもいえることであろう。こうした時系列データ解析の現状を考え、国立極地研究所における **AD** 変換システムの充実と相伴って、データの選択およびスペクトル解析手法の選択を容易にする方法の一つとして、今回のグラフィックディスプレイを用いた会話型スペクトル解析システム (**Conversational Spectrum Analysis Program**; 以下 **CSAP** と略す) の開発を行った。

CSAP システムは国立極地研究所の電子計算機 **HITAC M-160 II** (メモリ: 512 kB) およびその周辺機器であるグラフィックディスプレイ端末 (管面蓄積型, 11 インチ×11 インチ, 4000×4000) を主に用いており、1次元および2次元の時系列データ (磁気テープ、またはカード) に対しスペクトル解析を行う。その特徴は次の通りである。

- 1) グラフィックディスプレイ上に表示された時系列データを見ながら、必要に応じてデータを前後に流し、任意に解析データを選び出せる。
- 2) スペクトル計算の前処理としてフィルター機能を有し、フィルターの結果を見ながら繰り返しフィルターを変えることができる。
- 3) スペクトル計算の結果を見ながら繰り返しスペクトルの手法を変えることができる。
- 4) オリジナルデータ、フィルター結果およびスペクトル結果の表示の種類が豊富であり、

しかも必要に応じていつでもグラフィックディスプレイ上の図のハードコピーをとることができる。

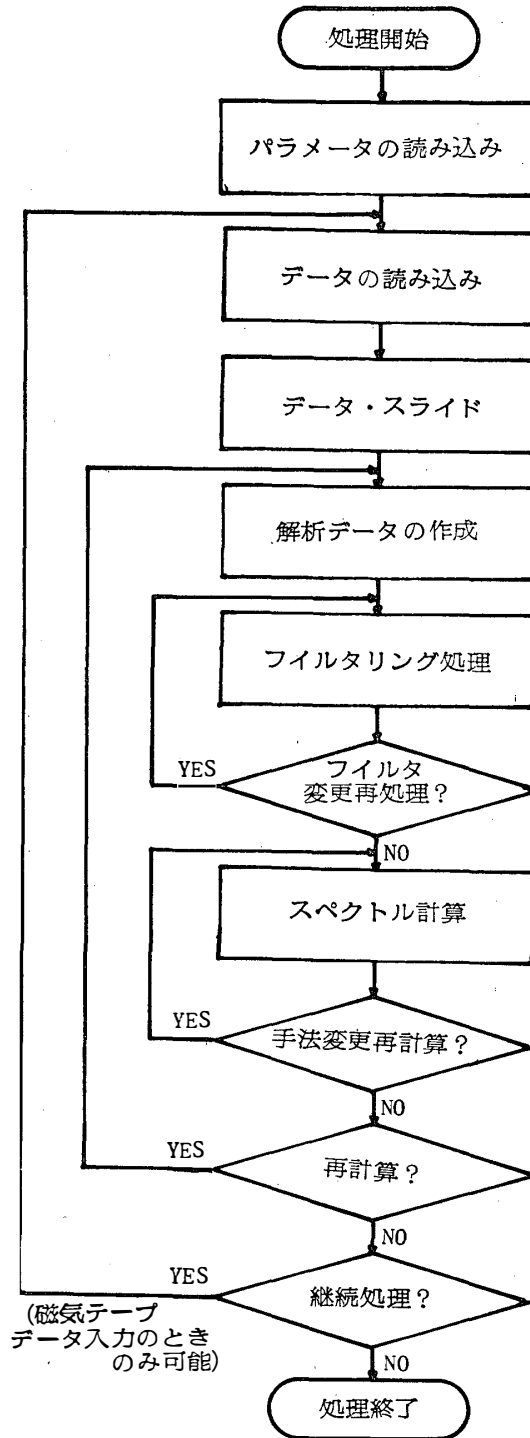


図 1 会話型スペクトル解析システム (CSAP) の処理構造
Fig. 1. Structure of the conversational spectral analysis system (CSAP).

以下の章で CSAP システムの詳細および解析例を示し、その検討を行う。

2. システムの処理概要および機能

CSAP システムの処理構造は図 1 の通りである。以下にフローにそって説明を行う。

2.1. パラメータの読み込み

解析に必要な基本パラメータをカードから入力する。基本パラメータとしては、解析次元数 (1 または 2)、データの媒体 (磁気テープまたはカード)、読み込みデータ数 (ディスプレイ上の表示データ数)、表示の際のスケールファクター等がある。

2.2. データの読み込み

基本パラメータの情報に従って磁気テープ、またはカードからデータの読み込みを行う。読み込まれたデータは、図 2 の上部のようにディスプレイ上に表示される。表示部 I にデータ情報が、表示部 II に指定可能なコマンドが表示される。コマンドの一覧とその意味を表 1 に示す。

表 1 データ表示コマンド
Table 1. Data display commands.

コ マ ン ド	意 味	備 考
1	たて方向を 1 倍して表示	} スケール コマンド
2	たて方向を 2 倍して表示	
5	たて方向を 5 倍して表示	
A	たて方向を 10 倍して表示	
F	データを前方へ半分ずらして表示	} スライド コマンド
B	データを後方へ半分ずらして表示	
N	処理を先へ進める	処理コマンド

2.3. データスライド

磁気テープデータの時に限って、表 1 中の“F”または“B”をキー入力することにより、データを前後に流す (データスライド機能と呼ぶことにする) ことができ、めざす解析区間が見つかるまで繰り返し行うことができる。データスライドは、表示データの半分ずつ行われる。

2.4. 解析データの作成

めざす解析区間がディスプレイ上に表示された段階で表 1 中の“N”を入力すると、解析

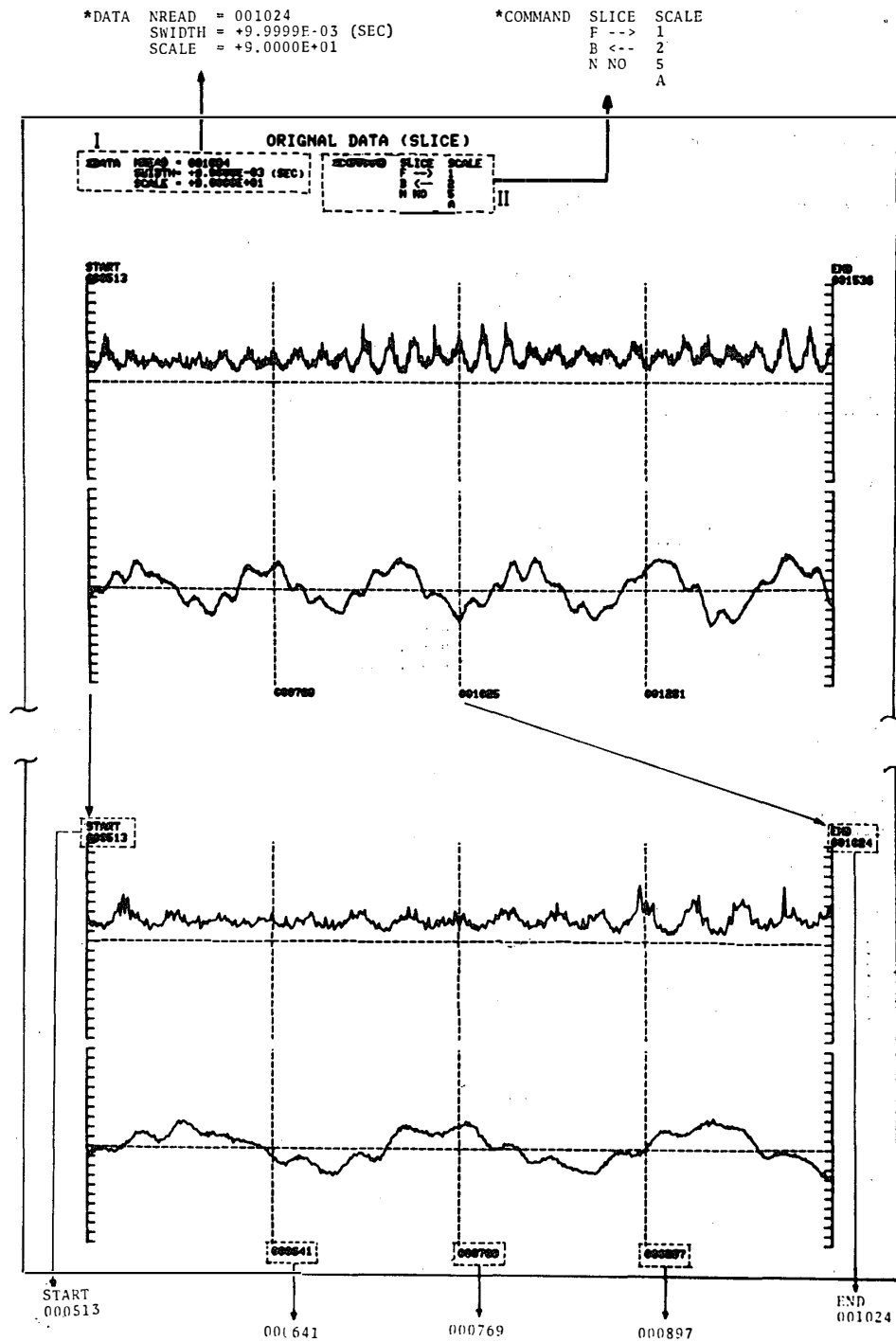


図 2 オリジナルデータの表示 (I: データ情報, II: コマンド)

Fig. 2. Display of the original data.

データの作成を行う。解析開始点, 解析終了点をカーソルで入力し, サンプルスキップ数をキー入力することにより, 解析データが決定され, 画面いっぱいに拡大表示される (図

2—下部).

2.5. フィルタリング処理

フィルターパラメータに従ってフィルタリング処理が行われ、図3のように表示される。表示部 I, II, III にはそれぞれデータ情報、フィルター情報および指定可能コマンドが表示される。コマンドの一覧とその意味を表2に示す。図3は“C2”表示の例である。このようにフィルターの結果を見ながら必要に応じてフィルターパラメーターを修正し、繰り返しフィルタリング処理を行うことができる。すなわち表2中の“NO”を入力すると“FILTER PARAMETER CHANGE?”のメッセージがでるから、“Y”と答えれば、パラメータの修正

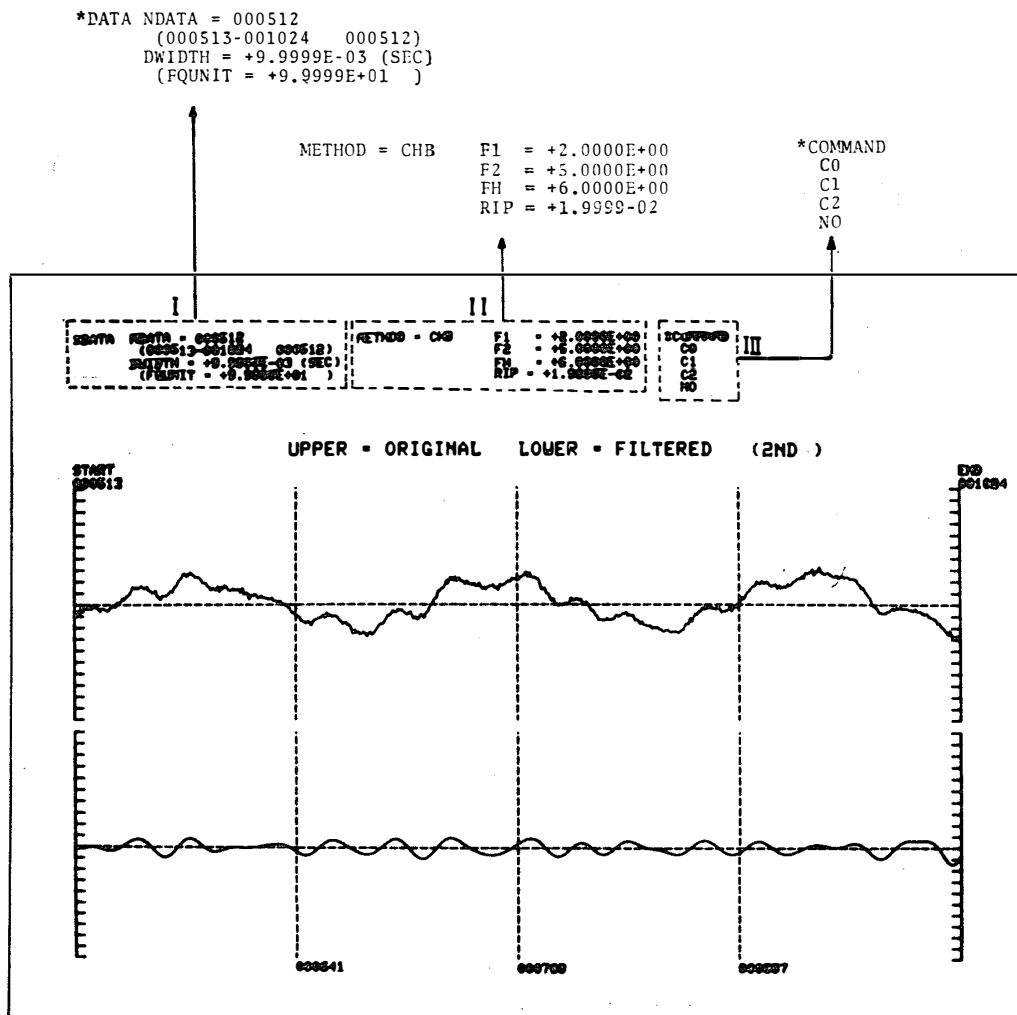


図3 フィルター結果の表示
(I: データ情報, II: フィルター情報, III: コマンド)
Fig. 3. Display of the filtered data.

表 2 フィルター結果表示コマンド
Table 2. Filtered data display commands.

コマンド	意味	備考
C0	第1系列および第2系列のフィルター結果を表示	表示コマンド (1次元の時は) C1のみ
C1	第1系列のフィルター前およびフィルター後を表示	
C2	第2系列のフィルター前およびフィルター後を表示	
NO	処理を先へ進める	処理コマンド

*DATA NDATA = 000512
(000513-001024,000001)
DWIDTH = +9.9999E-03 (SEC)
(FQUNIT = +9.9999E+01)

METHOD = FFT LAGH = 000128
WINDOW = HANNING NFRQ = 000128
CRITERION = NO PWHT = +0.0000E+00
NFIT = 000000 FPE = +0.0000E+00

*COMMAND
P0 S0 C0 PL LN(LINEAR)
P1 SA C1 LG(LOG)
P2 ST C2 NO
P3 SP C3
P4 SC C4

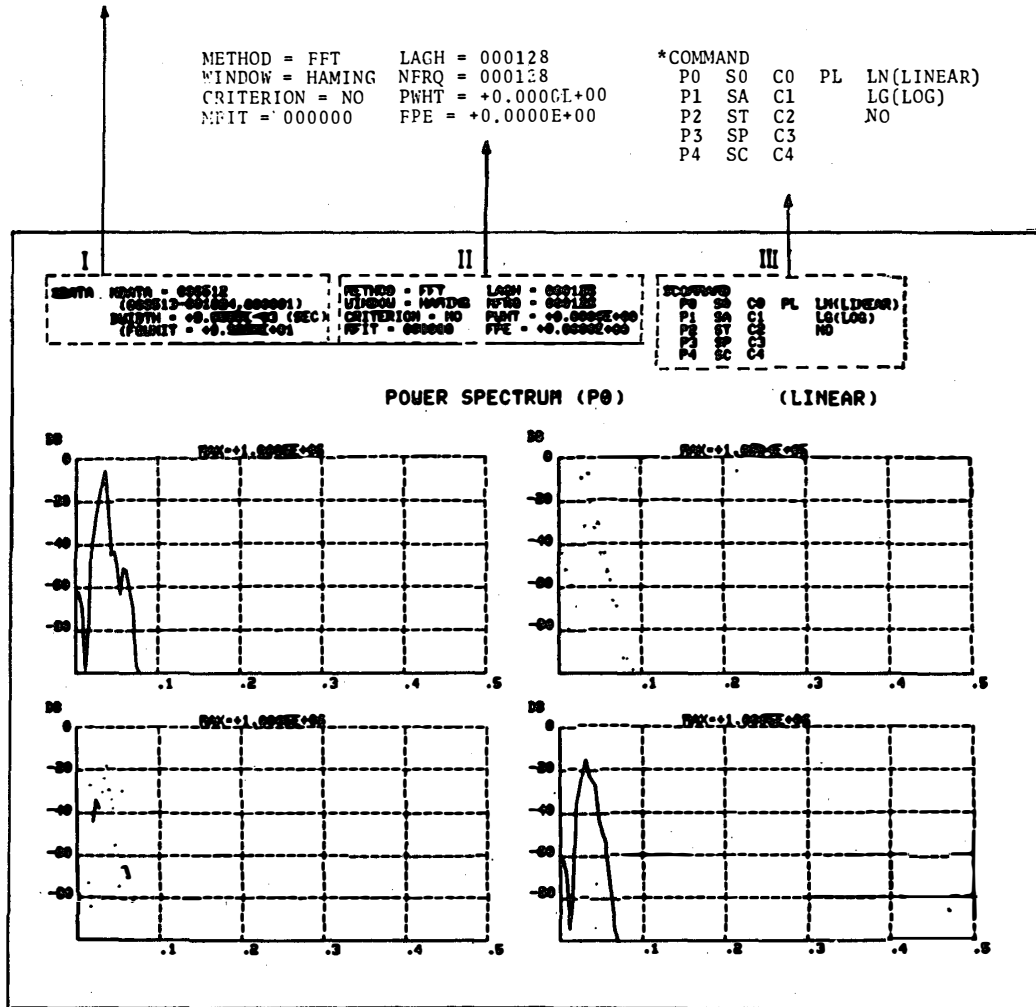


図 4 スペクトル解析結果の表示 I—クロススペクトル
(I: データ情報, II: スペクトル情報, III: コマンド)
Fig. 4. Display of the spectral analysis results I—cross spectrum.
(I: data informations, II: spectral informations, III: commands)

を行ってフィルタリング再実行となり，“N”と答えれば求めるフィルターが得られたということで次のステップに入る。フィルターパラメータはあらかじめカードから入力することもできるし、ディスプレイから入力することも可能である。なおフィルターとしては、チェビシェフの low-pass, high-pass, band-pass および band-reject フィルターが組みこまれている。フィルターパラメータについては、Appendix の 1 を参照のこと。

2.6. スペクトル計算

スペクトルパラメータに従って計算されたスペクトルの結果は、図4のように表示される。表示部 I, II, III にはそれぞれデータ情報、スペクトル解析情報および指定可能コマンドが表示される。コマンドの一覧とその意味を表3に示す。表3からもわかるように、1次元データに対してはパワースペクトルおよび自己相関関数が計算され、2次元データに対してはその他に、クロススペクトル、相互相関関数、周波数応答関数、フェイズ、コヒーレンシおよびポーラリゼーション等が計算される。図4は“P0—LN”（リニア周波数表示のスペクト

表 3 スペクトル結果表示コマンド
Table 3. Spectral analysis display commands.

コマンド	意味	備考
P0	P1~P4 を同時に表示	表示コマンド (1次元の時は) (P1, C1 のみ)
P1	第1系列のパワースペクトルを表示	
P2	クロススペクトルの実数部を表示	
P3	クロススペクトルの虚数部を表示	
P4	第2系列のパワースペクトルを表示	
C0	C1~C4 を同時に表示	
C1	第1系列の自己相関関数を表示	
C2	相互相関関数の正のラグの部分を表示	
C3	相互相関関数の負のラグの部分を表示	
C4	第2系列の自己相関関数を表示	
S0	SA~SC を同時に表示	
SA	クロススペクトルの絶対値を表示	
ST	周波数応答関数の絶対値を表示	
SP	位相を表示	
SC	コヒーレンシを表示	
PL	ポーラリゼーションパラメータを表示	
LN*	横軸(周波数軸)をリニア表示	座標変換 コマンド
LG*	横軸(周波数軸)を対数表示	
NO	処理を先へ進める	処理コマンド

* C0~C4 に関しては、横軸がタイムラグであるので、LN の時は最大ラグまで表示し、LG の時は最大ラグの 1/4 までを表示する。

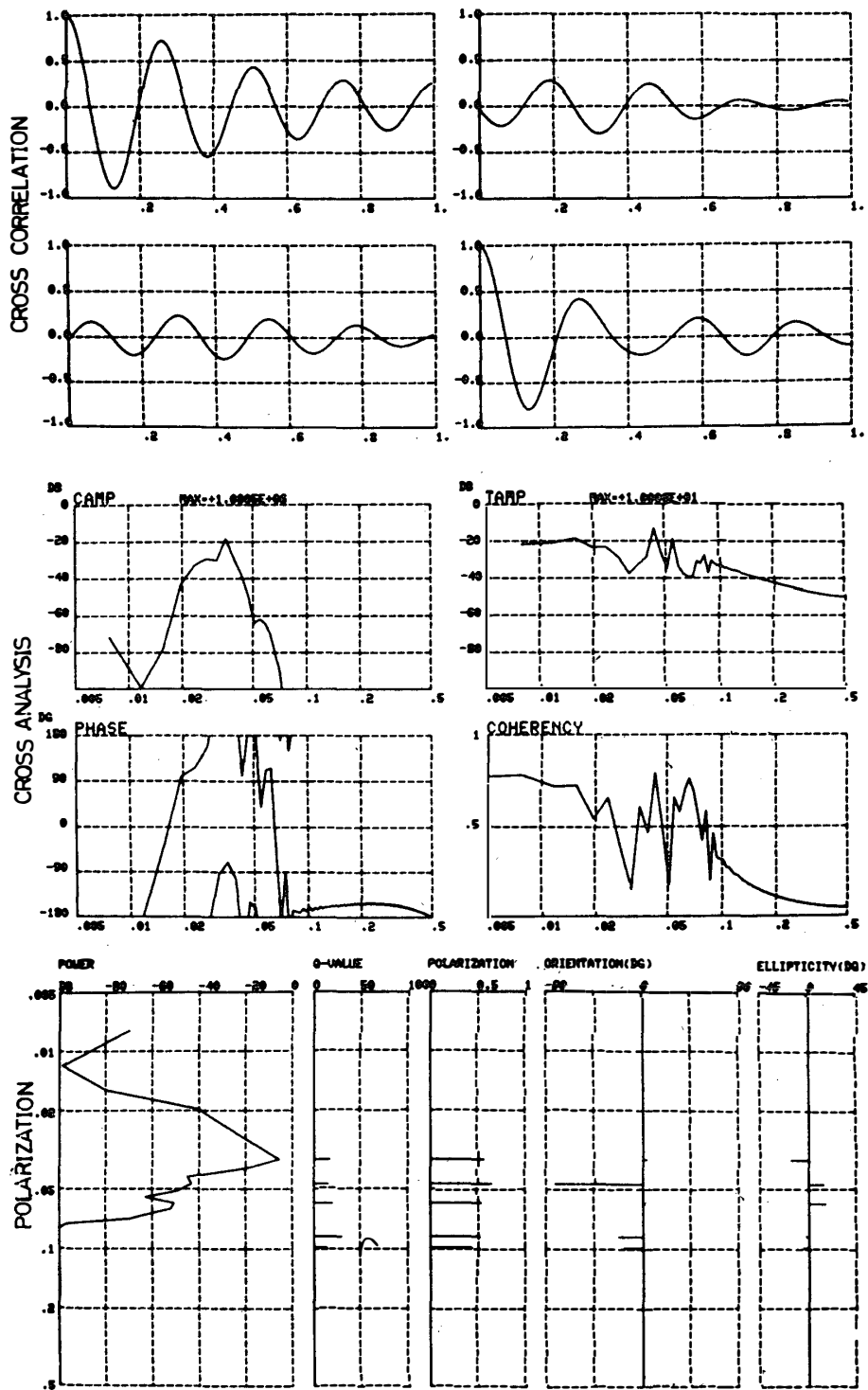


図 5 スペクトル解析結果の表示 II
 (上: 相互相関関数, 中: クロスパラメータ,
 下: ポーラリゼーション)

Fig. 5. Display of the spectral analysis results II.
 (upper: cross correlation, middle: cross parameters,
 lower: polarization parameters)

ル)の例であり, 図5に“C0-LN”(コリレーション), “S0-LG”(対数周波数表示のクロスパラメータ)および“PL-LG”(対数周波数表示のポーラリゼーション)の例を示す. 周波数軸は“P0”, “S0”においては横軸に, “PL”においては縦軸にとられており, “C0”においては横軸がタイムラグとなっている. このようにスペクトル計算の結果をいろいろ見ながら必要に応じてスペクトルパラメータを修正し, 繰り返しスペクトル計算を行うことが

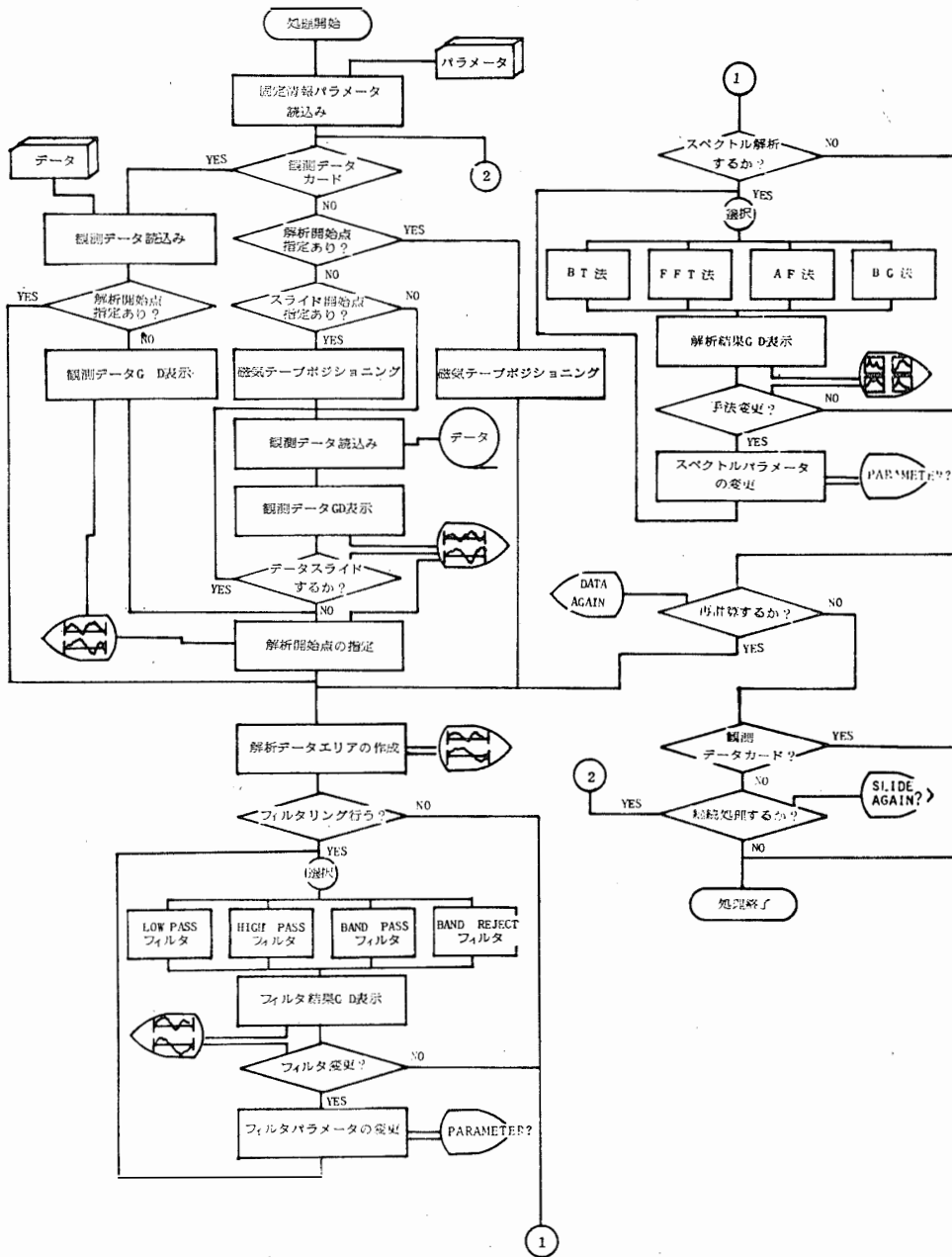


図6 会話型スペクトル解析システム (CSAP) の処理フロー

Fig. 6. Flow-chart of the conversational spectral analysis system (CSAP)

できる。すなわち表3中の“NO”を入力すると“SPECTRUM PARAMETER CHANGE?”のメッセージが出るから、“Y”と答えればパラメータの修正を行ってスペクトル計算の再実行となり、“N”と答えれば求めるスペクトル結果が得られたということで次のステップに入る。なおスペクトル計算の手法としては、Blackman-Tukey法（以下BT法と略す）、Fast-Fourier-Transform法（以下FFT法と略す）、Maximum-Entropy法（相関関数を計算してから係数を決める方法（以下AF法と略す）とBurgのアルゴリズムによる方法（以下BG法と略す）の4つが組み込まれている。ただし2次元に対してのBurg法は組み込んでいない。スペクトルパラメータについては、Appendixの2を参照のこと。スペクトル解析の結果が数値として必要な時は、ラインプリンターに出力することもできる。

2.7. 再計算および継続処理

ステップ2, 4で作られた解析データの範囲で解析開始点、解析終了点およびステップ間隔を再入力して、再度フィルターおよびスペクトル計算を行うことができる。また、さらに先のデータに対して、データスライド等の継続処理を行うことができる。

2.8. その他

このような基本的な処理機能の他に、あらかじめ解析開始点、解析データ数等をカードで与えておくことによって、半自動半会話的な処理を行うことができる。また、フィルター処理部およびスペクトル解析部を通過して、データの基本的処理（データの表示、一部分の拡大、位置の読みとり等）を繰り返し行う目的にも使用することができる。

なお参考のために、処理の詳しいフローチャートを図6に示す。

3. テストデータによる検討

2.6. で述べたように、スペクトル計算においては、4つの手法（BT法、FFT法、AF法、BG法）から任意に手法を選択して、スペクトル密度関数、相関関数、周波数応答関数、フェイズ、コヒーレンシおよびポーラリゼーション等を求めることができる。それらの詳しい説明については、Appendixの2を参照されたい。ここでは、テストデータによるプログラムの検討および各手法の特徴についての考察を行う。また、チェビシェフフィルターの振幅およびフェイズ特性についての検討も行う。チェビシェフフィルターの原理についてはAppendixの1を参照されたい。

3.1. スペクトル密度関数 I

3 つの異なる周波数成分を持つ波が、異なる振幅の比で重なり合ってきたテストデータに対して、スペクトル密度関数がどのように求められるかということ、4 つの手法について検討を行った。テストデータとして次のような1次元データを用いた。

$$x(s) = 5 \sin(2\pi \cdot 0.02 \cdot s) + 2 \sin(2\pi \cdot 0.05 \cdot s) \\ + \sin(2\pi \cdot 0.2 \cdot s) + \text{RANDOM}.$$

ここで、

$$\Delta t = 1 \text{ sec}, s = 1, 512,$$

$$\text{RANDOM} = (0, 1) \text{ の一様乱数 } \left(\text{平均 } \frac{1}{2}, \text{分散 } \frac{1}{12} \right).$$

式からわかるように、このテスト時系列は周波数が 0.02 Hz, 0.05 Hz, 0.2 Hz の正弦波が 5 : 2 : 1 (パワーにして $5^2 : 2^2 : 1^2$) の比で重なりあったものにホワイトノイズが加わってできている。スペクトル密度の値は、ほぼ (分散) / (半値幅) で与えられる。ホワイトノイズは、すべての周波数に平均してパワーを持つから、半値幅を 0.5 とすると、

$$P_{\text{noise}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{0.5} = \frac{1}{6} \approx 0.17$$

となる。一方、正弦波スペクトルの半値幅は $2\Delta f$ (Δf は周波数分解能) と仮定すると、128 点の分解能で計算した場合、

$$2\Delta f = 2 \cdot \frac{0.5}{128} = \frac{1}{128}$$

となるから、スペクトル密度はそれぞれ、

$$P_{0.02} = \frac{5^2}{2} \bigg/ \frac{1}{128} = 1600$$

$$P_{0.05} = \frac{2^2}{2} \bigg/ \frac{1}{128} = 256$$

$$P_{0.2} = \frac{1^2}{2} \bigg/ \frac{1}{128} = 64$$

となる。

図7にスペクトル計算の結果を示す。上から BT 法, FFT 法, AF 法および BG 法による結果である。BT 法では、ハニングウィンドウを、FFT 法では、ハミングウィンドウを用いて計算している。4 つの手法を通じてオーダーはあっているが、細部にいろいろと相違点が見られる。AF 法, BG 法はするどいピークを見せているが、ピーク値の比が予想される

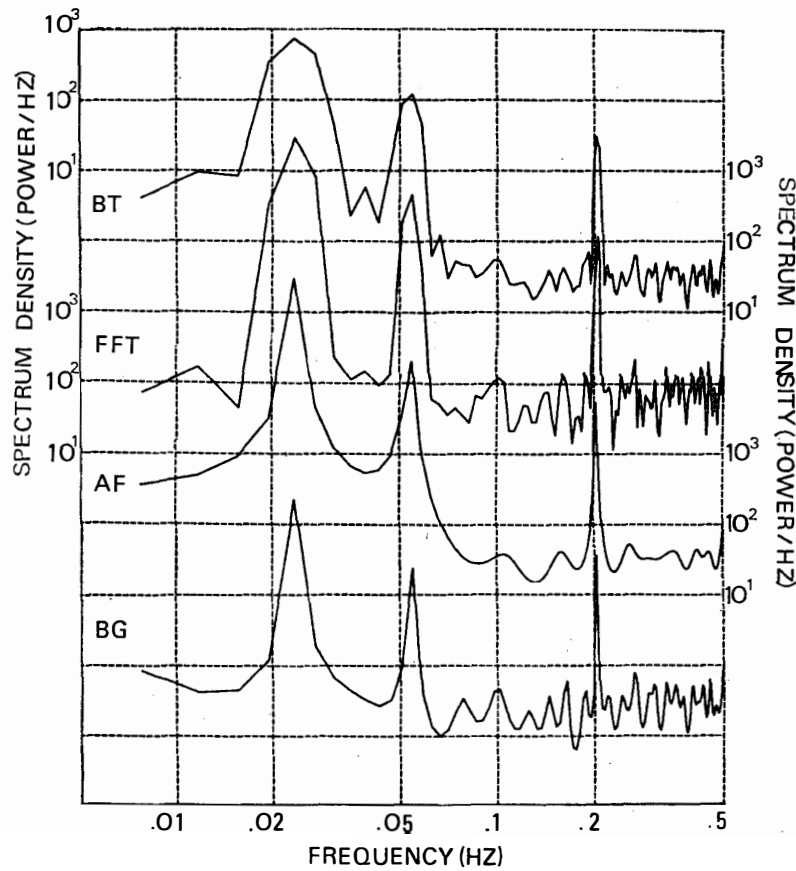


図 7 パワースペクトル結果 I—3 つのピークを持つ波の場合
($f=0.02\text{ Hz}, 0.05\text{ Hz}, 0.2\text{ Hz}$)

Fig. 7. Spectrum I (in the case of three peaks of spectrum ; $f=0.02, 0.05, 0.2\text{ Hz}$).

$5^2 : 2^2 : 1^2$ になっていない。ULRYCH and BISHOP (1975) の指摘のように、ピークの半値幅での積分をとると、それに近い比になっている。これに反し、BT 法、FFT 法は正しいピーク値の比を示しており、ピーク値は BT 法では低めに、FFT 法では少し高めに出ている。また、AF 法と BG 法を比較した場合、同じ FPE クライテリオンで次数を決定しても、それぞれ 23 次、56 次と、BG 法の方が高い次数で求まっている。そのため当然のことながら、BG 法の方がピークがするどくなっており、ノイズレベルの分散も大きくなっている。4 つの手法について、ノイズレベルを比較すると、BT 法、AF 法では、低周波のノイズレベルが上がっているのに対し、FFT 法、BG 法では、全周波数にわたって平均してホワイトノイズのスペクトル密度 0.17 にほぼ等しくなっている。なお、各ピークの位置は $\pm \Delta f = \pm 1/128 \cong \pm 0.01$ の誤差範囲で正しいが、少し高めに求まっている。数値データ作成の段階での切りすての効果等を考えると、妥当と思われる。

3.2. スペクトル密度関数 II

ある固定周波数を持つシグナルが、ランダムなノイズに埋もれている時、シグナルのノイズに対する比 (S/N 比) の変化に応じて、スペクトル密度関数がどのように変化するかというのを、4 つの手法について検討を行った。テストデータとして次のような1次元データを用いた。

$$x(s) = c \sin(2\pi \cdot 0.05 \cdot s) + (1-c) \text{RANDOM.}$$

ここで、

$$\Delta t = 1 \text{ sec, } s = 1, 512, 0 \leq c \leq 1,$$

$$\text{RANDOM} = (0, 1) \text{ の一様乱数 } \left(\text{平均 } \frac{1}{2}, \text{分散 } \frac{1}{12} \right).$$

式からわかるように、このテスト時系列は、周波数が 0.05 Hz の正弦波にホワイトノイズが加わってできている。3.1. と同じような手続きでシグナルとノイズのパワーの比をとってみると、

$$\begin{aligned} P_{\text{signal}} : P_{\text{noise}} \\ = c^2 \cdot \frac{1}{2} \bigg/ \frac{1}{128} : (1-c)^2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{0.5} = \frac{384 c^2}{(1-c)^2} \end{aligned}$$

となる。

図8に $c=0.2, 0.3, 0.4, 0.8$ に対する4つの手法によるスペクトル計算の結果を示す。それぞれ上から BT 法, FFT 法, AF 法および BG 法による結果である。BT 法では、ハミングウィンドウを、FFT 法では、ハミングウィンドウを用いて計算した。S/N 比は、 $c=0.2, 0.3, 0.4, 0.8$ に対して、それぞれほぼ 24 (28 dB), 70 (37 dB), 171 (45 dB), 6144 (76 dB) が予想されるが、4 つの手法ともオーダーは正しい結果を示している。ノイズの多い $c=0.2$ (28 dB) の時、AF 法は良くないが、BT 法, FFT 法および BG 法では、よく求められている。ノイズが少なくなるにつれ、4 手法ともきれいなピークを示すが、AF 法はサイドローブが非常に小さいのが特徴であり、BG 法は他の手法に比べてずいぶん高いピークを持つのが特徴である。なお、図8で $c=0.8$ の時の BT 法の結果で、一部とぎれたところがあるが、これは負の値が求まっているためである。

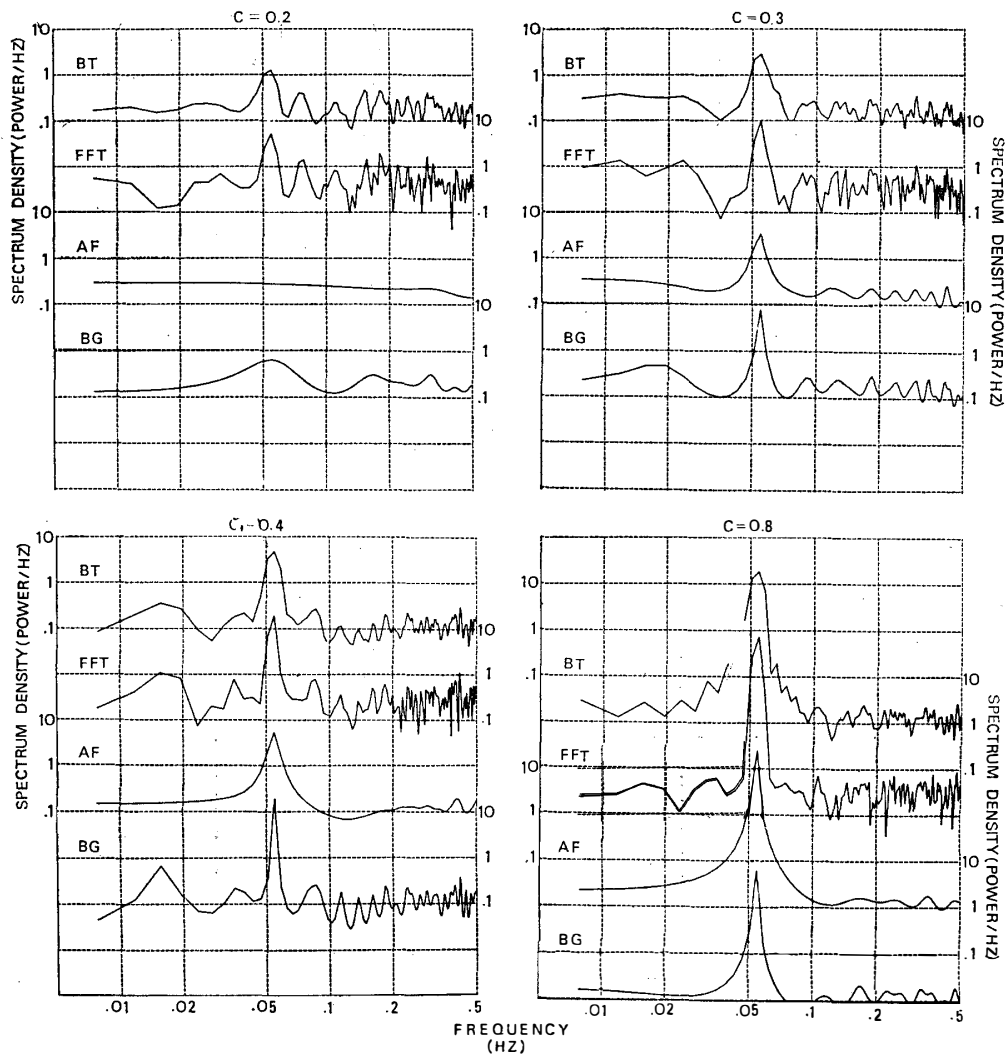


図 8 パワースペクトル結果 II—1 ピークの波で S/N 比を変えた場合 ($c=0.2, 0.3, 0.4, 0.8$)
 Fig. 8. Spectrum II (changing S/N ratio; $c=0.2, 0.3, 0.4, 0.8$).

3.3. 相関関数 I

自己相関関数の求め方には、定義式を有限次で近似する BT 法 (AF 法と同じ)、スペクトル密度関数の逆フーリエ変換として求める FFT 法、およびデータから直接予測フィルタの係数を求めてから相関関数を推定する BG 法がある (詳しくは Appendix の 2 を参照)。それらによる相関関数を比較するために、1 次元データ、

$$x(s) = \sin(2\pi \cdot 0.05 \cdot s) + \text{RANDOM}.$$

ここで、

$$\Delta t = 1 \text{ sec}, s = 1, 512,$$

$$RANDOM=(0, 1) \text{ の一様乱数 } \left(\text{平均 } \frac{1}{2}, \text{ 分散 } \frac{1}{12} \right)$$

について検討を行った。図9に、BT法(AF法)、FFT法およびBG法による結果を示す。BT法に比べて、FFT法およびBG法では、タイムラグが0以外の所で値の下がり方が大きく、ピークの位置も少し大きくなっている。また、有限長のデータであることから、長いラグになるほどデータ数の不足による影響が大きく、一般には長いラグになるほど相関が小さく求まる傾向があるが、BG法は他の2つの手法に比べ、その傾向が少ない。

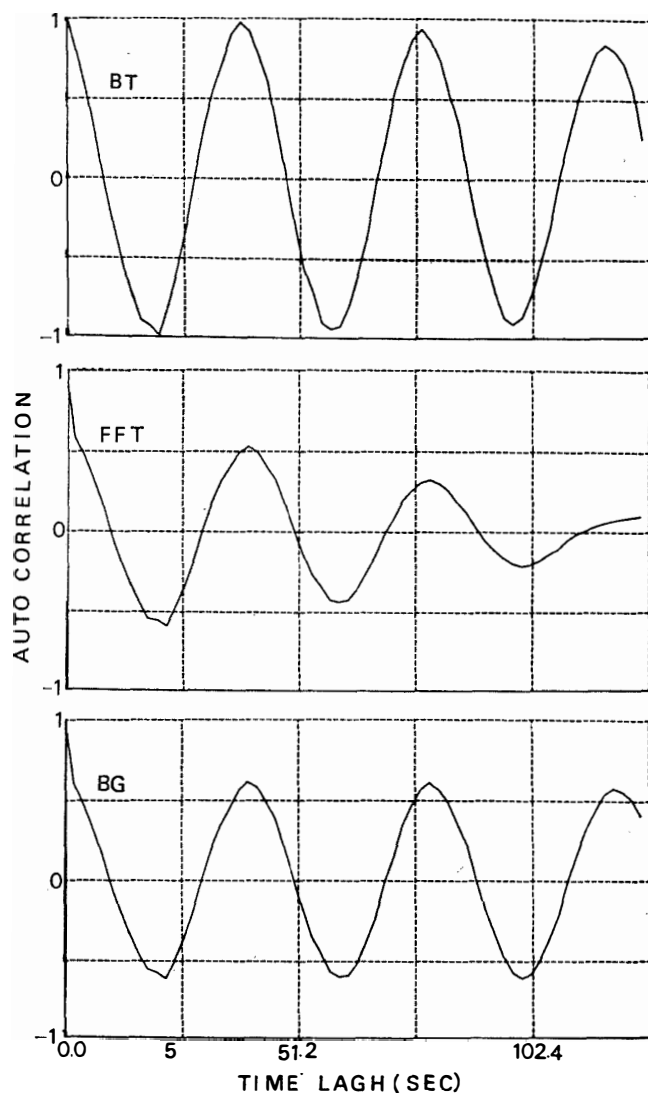


図9 自己相関関数(上: BT法, 中: FFT法, 下: BG法)
 Fig. 9. Auto correlations (upper: BT, middle: FFT, lower: BG).

3.4. 相関関数 II

2つの異なる周期の波が重なりあってできた時系列データに対し、その位相をずらしたも

のとの相互相関はどのように求まるかを検討するために、次のような2次元データによるテストを行った。

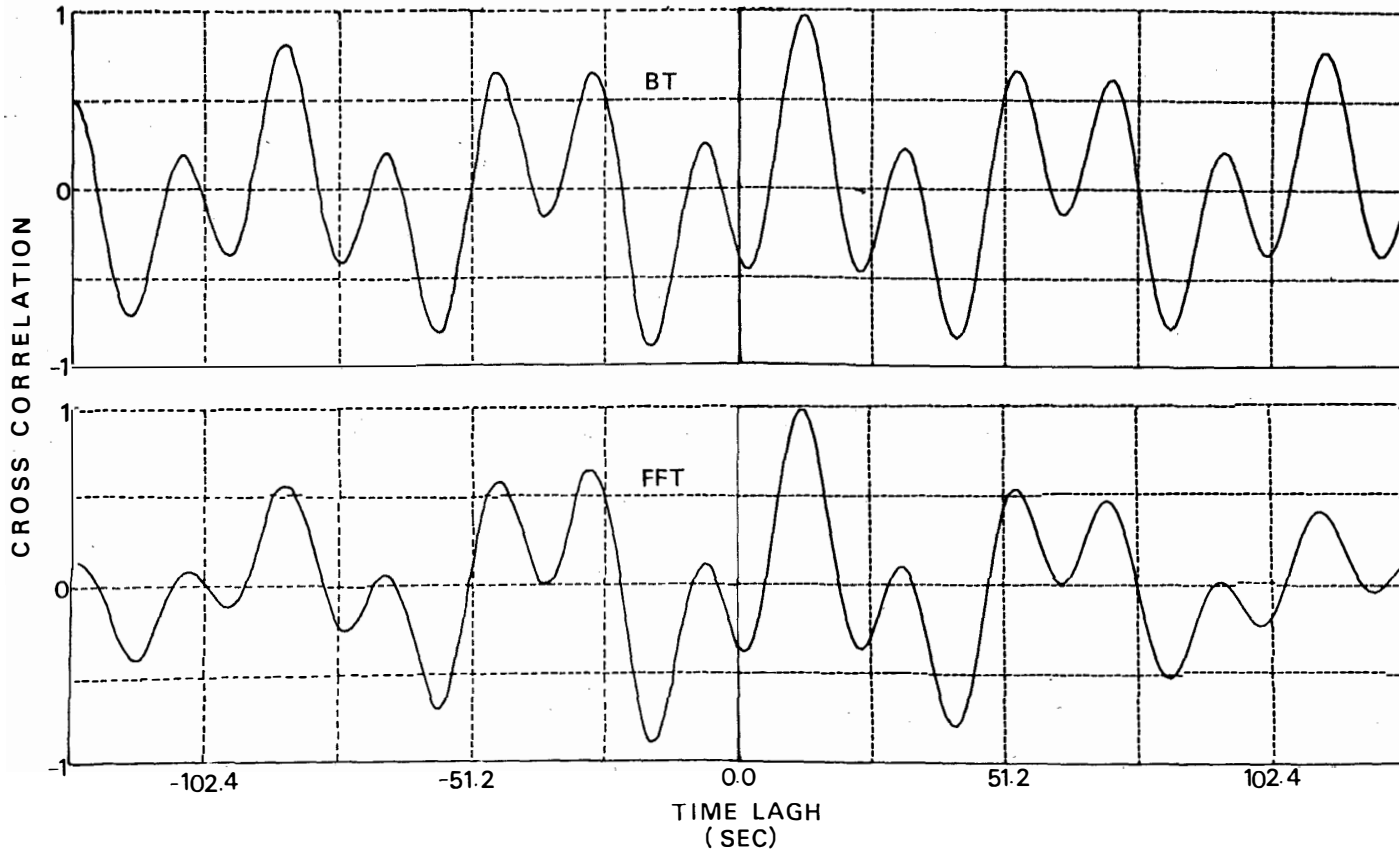


図 10 相互相関関係 (上: BT 法, 下: FFT 法)
Fig. 10. Cross correlations (upper: BT, lower: FFT).

$$\begin{cases} x(s) = \sin(2\pi \cdot 0.02 \cdot s) + \sin(2\pi \cdot 0.05 \cdot s) \\ y(s) = \sin\left(2\pi \cdot 0.02 \cdot s + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(2\pi \cdot 0.05 \cdot s + \frac{5\pi}{4}\right). \end{cases}$$

ここで、

$$\Delta t = 1 \text{ sec}, s = 1, 512.$$

これらの式からわかるように、時系列 $\{x(s)\}$ は、2つの異なる周期の波（50 sec および 20 sec）を重ねあわせたものであり、時系列 $\{y(s)\}$ は、2つの波をともに 12.5 sec ずつ $\{x(s)\}$ に対して進ませたものの合成波である。図 10 に BT 法（AF 法）および FFT 法による結果を示す。BT 法、FFT 法とも、フェイズの完全に一致する 12.5 sec でするどいピークを持っている。その他のピークでは、FFT 法は BT 法に比べピークが小さめに求まっている。

3.5. 周波数応答関数

時系列 $\{x(s)\}$ を入力とし $\{y(s)\}$ を出力とする系の周波数変換の性質を表わす周波数応答関数のテストとして、次のような簡単な系を考えた。

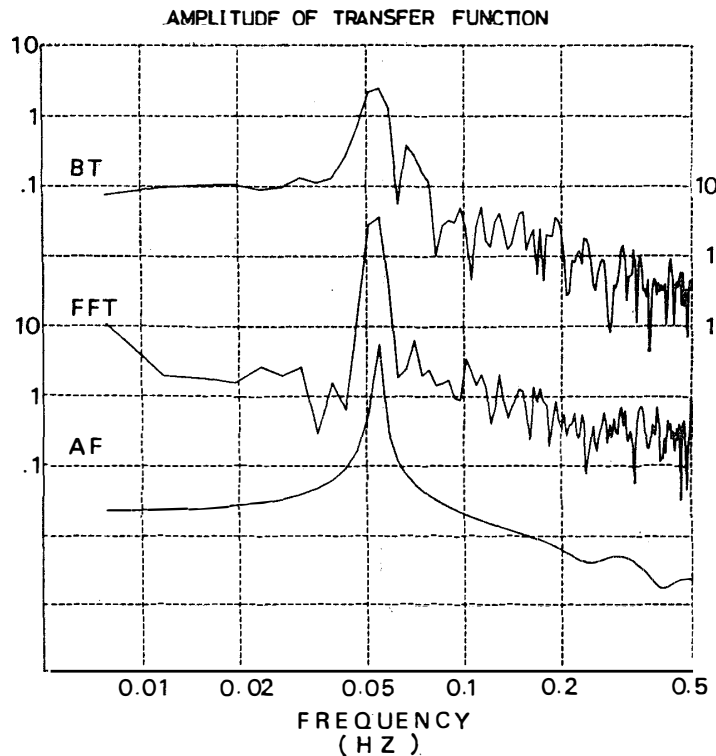


図 11 周波数応答関数の絶対値（上：BT 法，中：FFT 法，下：AF 法）

Fig. 11. Amplitude of the frequency response function (upper; BT, middle: FFT, lower: AF).

$$\begin{cases} x(s) = \text{RANDOM} \\ y(s) = \sin(2\pi \cdot 0.05 \cdot s). \end{cases}$$

ここで,

$$\Delta t = 1 \text{ sec}, s = 1, 512,$$

$$\text{RANDOM} = (0, 1) \text{ の一様乱数 (平均 } \frac{1}{2}, \text{ 分散 } \frac{1}{12}).$$

このような系は、ランダムなホワイトノイズの入力に対し、正弦波の出力が得られているから、正弦波の周波数だけバンドパスさせるような変換系が予想される。図11に BT 法、FFT 法および AF 法による結果を示す。ともに 0.05 Hz にきれいなピークを示している。

3.6. フェイズおよびコヒーレンシ

定まった位相差を持つ2つの正弦波にホワイトノイズが重なった場合、その S/N 比の大

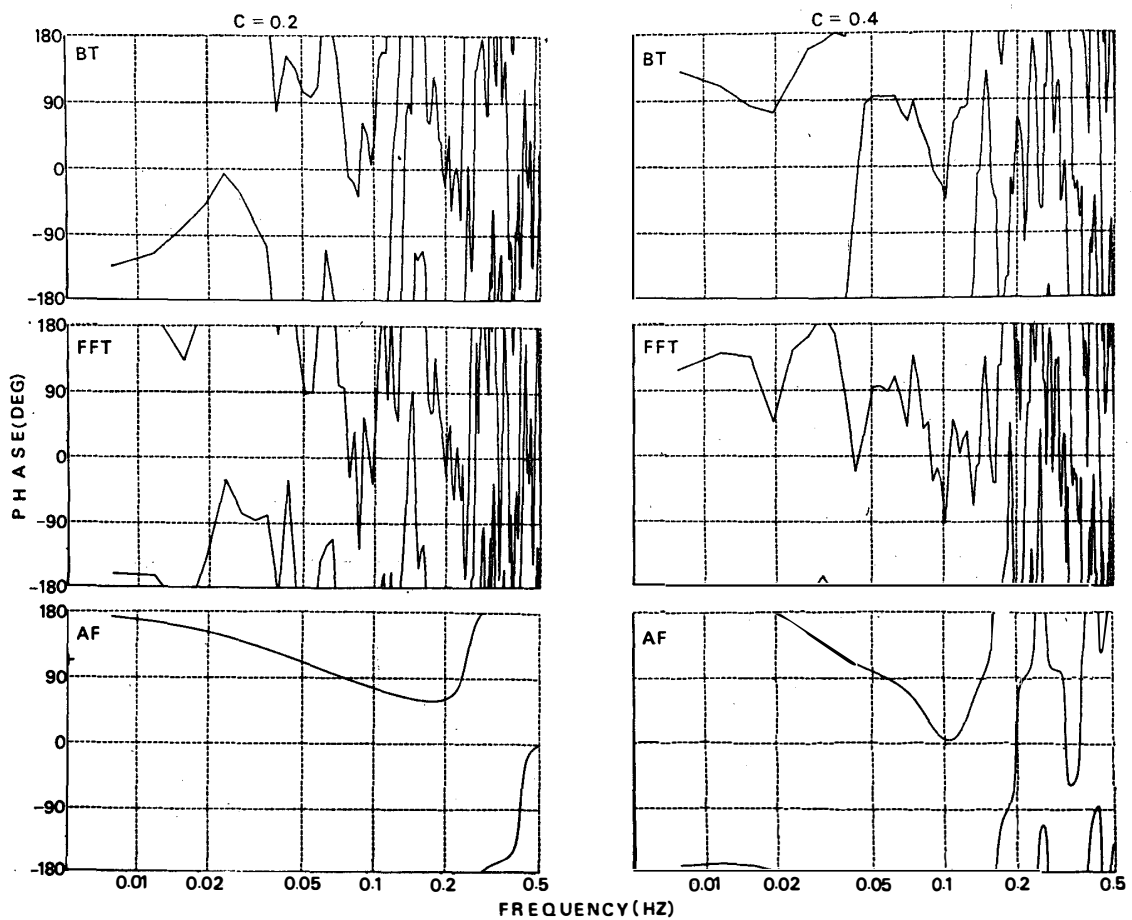


図 12 フェイズ (左: $c=0.2$, 右: $c=0.4$, 上: BT 法, 中: FFT 法, 下: AF 法)
 Fig. 12. Phase (left: $c=0.2$, right: $c=0.4$, upper: BT, middle: FFT, lower: AF).

きさに応じてフェイズ（位相）およびコヒーレンシがどのように求まるかを検討するために、次のような2次元テストデータについて検討を行った。

$$\begin{cases} x(s) = c \sin(2\pi \cdot 0.05 \cdot s) + (1-c) \text{RANDOM} \\ y(s) = c \sin\left(2\pi \cdot 0.05 \cdot s + \frac{\pi}{2}\right) + (1-c) \text{RANDOM}. \end{cases}$$

ここで、

$$\Delta t = 1 \text{ sec}, s = 1, 512, 0 \leq c \leq 1,$$

$$\text{RANDOM} = (0, 1) \text{ の一様乱数 } \left(\text{平均 } \frac{1}{2}, \text{分散 } \frac{1}{12} \right).$$

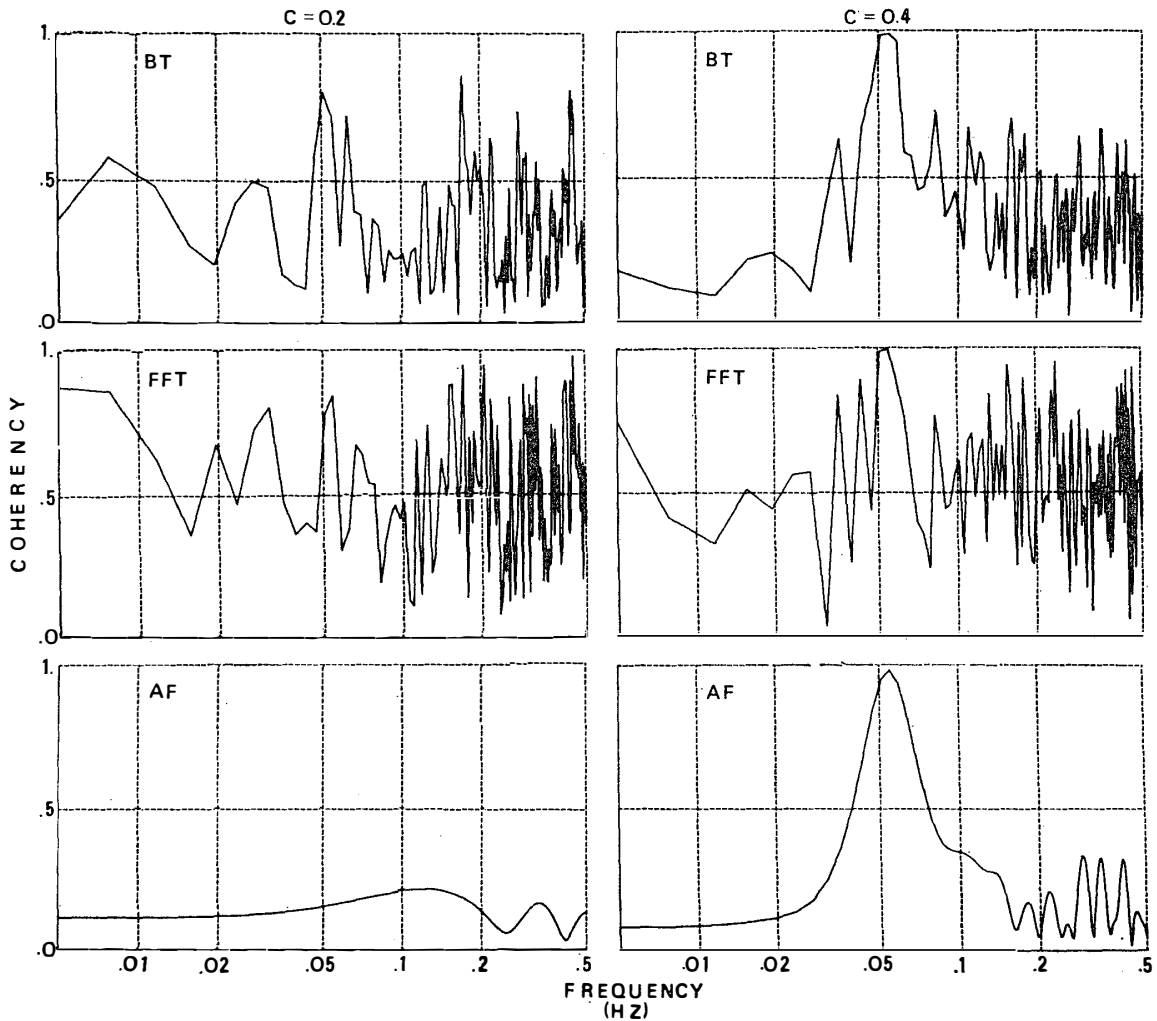


図 13 コヒーレンシ (左: $c=0.2$, 右: $c=0.4$, 上: BT 法, 中: FFT 法, 下: AF 法)
 Fig. 13. Coherency (left: $c=0.2$, right: $c=0.4$, upper: BT, middle: FFT, lower: AF)

$c=0.2, 0.4$ に対するフェイズの結果を図 12 に, コヒーレンシの結果を図 13 に示す. 3.2. と同じように, $c=0.2, 0.4$ はそれぞれ $S/N=28$ dB, 45 dB にほぼ相当する. 3.2. に示したように, $c=0.2$ の時の AF 法によるスペクトル密度関数の推定はよくないが, それにもかかわらず, フェイズは大体 90° の値を示している. コヒーレンシは 3 方法とも S/N 比に応じて大きくなっており, AF 法では, 相関のない部分のコヒーレンシの値が小さいので, 他の 2 つに比べて見やすい図が得られるのが特徴である.

3.7. ポーラリゼーション

一定の orientation および ellipticity を持つ 2 次元シグナルに対して, S/N 比の大きさに応じてポーラリゼーションパラメータ (偏波特性) はどのように求まるかを調べるため, 次

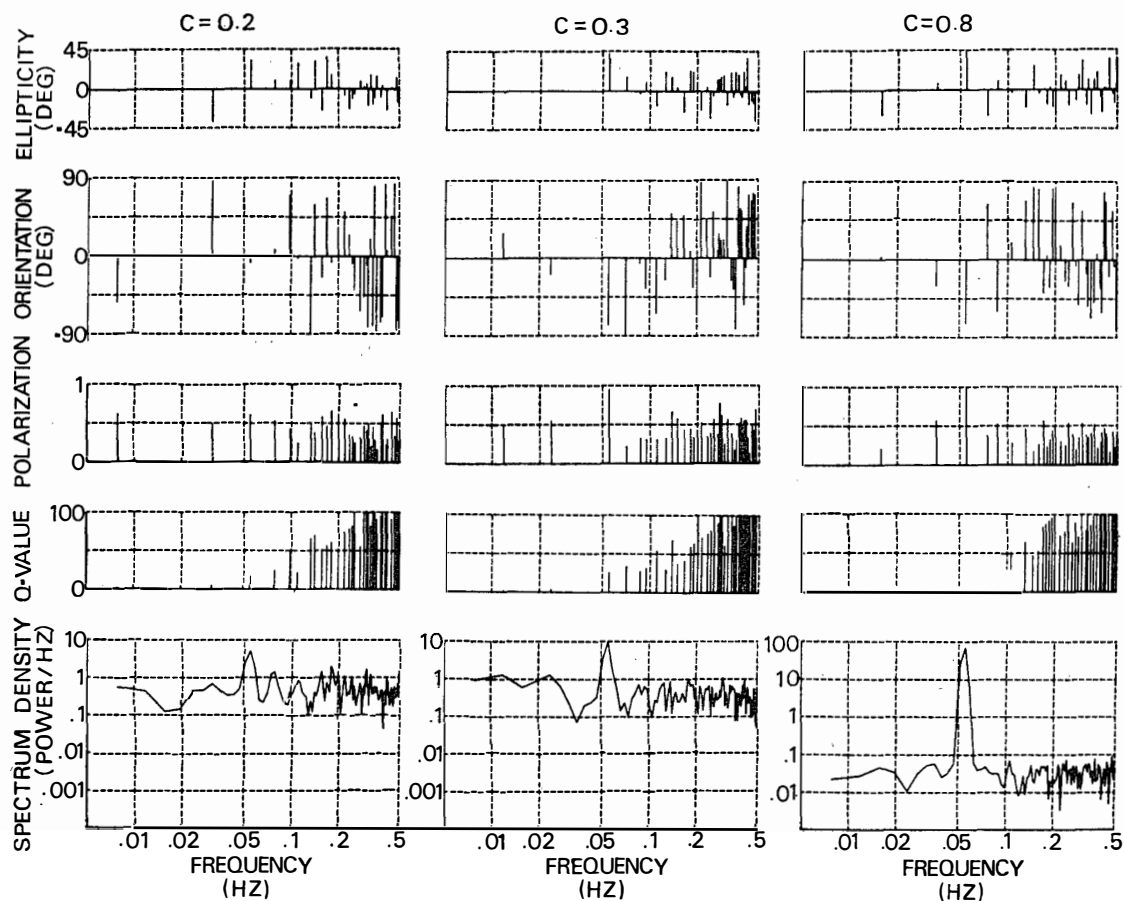


図 14 ポーラリゼーションパラメータ

(上から: ellipticity, orientation, polarization, Q-value, 第 1 系列のパワースペクトル, 左から: $c=0.2, 0.3, 0.8$)

Fig. 14. Polarization parameters (from upper: ellipticity, orientation, polarization, Q-value, power spectrum of the 1st time series, from left: $c=0.2, 0.3, 0.8$).

のような2次元テストデータについて検討を行った。

$$\begin{cases} x(s) = c \sin(2\pi \cdot 0.05 \cdot s) + (1-c) \text{RANDOM} \\ y(s) = c \cdot 1.5 \sin\left(2\pi \cdot 0.05 \cdot s + \frac{\pi}{2}\right) + (1-c) \text{RANDOM}. \end{cases}$$

ここで、

$$\Delta t = 1 \text{ sec}, s = 1, 512, 0 \leq c \leq 1,$$

$$\text{RANDOM} = (0, 1) \text{ の一様乱数 } \left(\text{平均} \frac{1}{2}, \text{分散} \frac{1}{12} \right).$$

これらの式からわかるように、時系列 $\{y(s)\}$ のシグナルは $\{x(s)\}$ のシグナルに対し、1.5 倍の振幅と 90° の位相ずれを持っているので、 $\pm 90^\circ$ の orientation, $\arctan(1/1.5) = 37.4^\circ$ の ellipticity および右まわりの偏波が予想される。図 14 に FFT 法による結果を示す。 $c = 0.2, 0.3, 0.8$ に対する結果で、上から順に ellipticity, orientation, polarization, Q-value および $\{x(s)\}$ のスペクトル密度関数を示す。3.2. と同様に $c = 0.2, 0.3, 0.8$ はそれぞれ S/N 比 = 28 dB, 37 dB, 76 dB にほぼ相当する。スペクトル密度関数のピーク的位置 0.05 Hz での各値を見ると、Q-value および polarization は S/N 比に比例して増加しており、orientation および ellipticity も期待される値を示している。

3.8. チェビシェフフィルターの振幅およびフェイズ特性

チェビシェフフィルターの振幅およびフェイズ特性を調べるために、次のような2次元テストデータについて検討を行った。

$$\begin{aligned} x(s) &= \sin(2\pi \cdot 0.02 \cdot s) + 2 \sin(2\pi \cdot 0.05 \cdot s) \\ &\quad + 5 \sin(2\pi \cdot 0.2 \cdot s) + \text{RANDOM}. \\ y(s) &= 5 \sin(2\pi \cdot 0.02 \cdot s) + 2 \sin(2\pi \cdot 0.05 \cdot s) \\ &\quad + \sin(2\pi \cdot 0.2 \cdot s) + \text{RANDOM}. \end{aligned}$$

ここで、

$$\Delta t = 1 \text{ sec}, s = 1, 512,$$

$$\text{RANDOM} = (0, 1) \text{ の一様乱数 } \left(\text{平均} \frac{1}{2}, \text{分散} \frac{1}{12} \right).$$

これらの式からわかるように、テスト時系列は 0.02 Hz, 0.05 Hz および 0.2 Hz の正弦波の合成波である。0.05 Hz の波だけを引きだすフィルターとして、チェビシェフのバンドパ

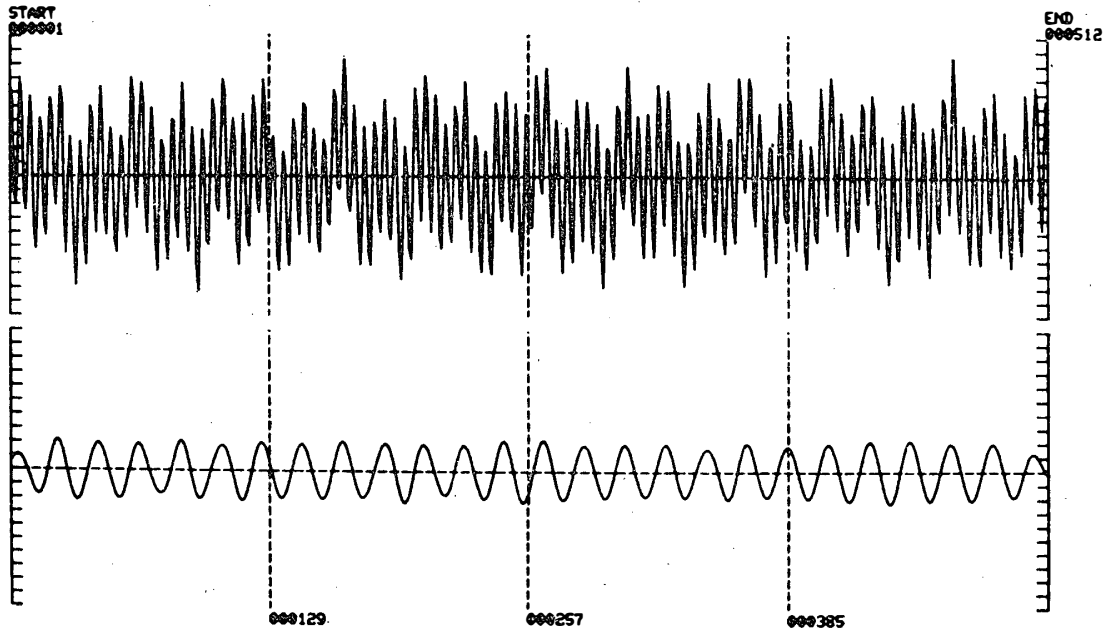


図 15 band-pass フィルターの例 (上: オリジナルデータ, 下: フィルター後のデータ)
 Fig. 15. Example of band pass filter (upper: original data, lower: filtered data).

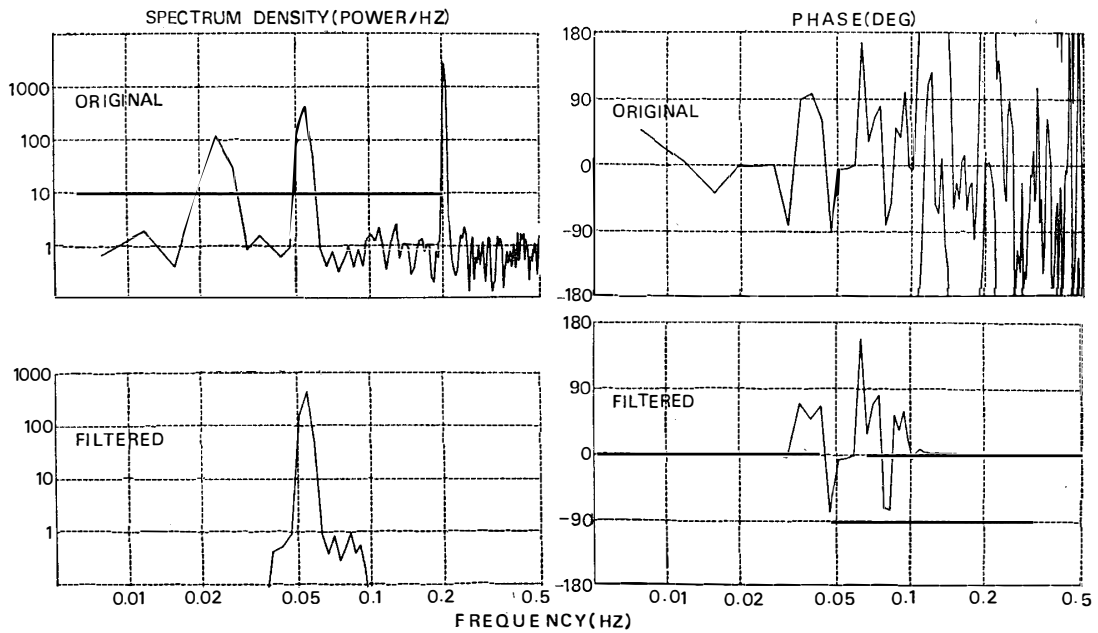


図 16 チェビシェフフィルターの振幅およびフェイズの例
 (上: オリジナル, 下: フィルター後, 左: パワースペクトル, 右: フェイズ)
 Fig. 16. Example of amplitude and phase of Chebyshev filter.
 (upper: original, lower: filtered, left: amplitude, right: phase)

スフィルターでカットオフ周波数が **0.04 Hz** および **0.08 Hz**, ハーフパワーポイントが **0.09 Hz**, リップルが **0.02** のものを使用した (詳しくは Appendix の 1 を参照). 図15 に第 1 系列についてオリジナルのデータとフィルターされた結果を示す. **0.05 Hz** の波だけがきれいにバンドパスされているのがわかる. 振幅の変化およびフェイズのずれはないように見えるが, それらを確認するために, 図 16 にフィルター前とフィルター後について, 第 1 系列のスペクトル密度関数および 2 系列のフェイズの結果を示す. 計算は FFT 法を用い, ハミングウィンドウを用いて行った. バンドパスされた部分の振幅およびフェイズに変化のないことが確認される.

3.9. まとめ (各スペクトル手法の特徴)

今回のテストデータによる検討は, プログラムが正しいか否かをチェックすることが第一の目的であったので, 各スペクトル手法の特徴を云々するほど十分な検討を行っていない. しかし不十分ながらもある程度の特徴が見られるので, 以下に列記する.

1) **AF** 法および **BG** 法は, 一般にするどいピークを見せているが, **BT** 法および **FFT** 法では, スペクトル密度関数のピーク値の比がシグナルのパワーの比になっているのに対し, **AF** 法および **BG** 法では, ピークの半値幅での積分値の比が, シグナルのパワーの比に等しくなっている. これは **ULRYCH and BISHOP (1975)** および **大内・南雲 (1975)** 等の指摘と一致している.

2) **BT** 法と **FFT** 法を比較した場合, **FFT** 法の方がピーク値が大きく求まると同時に, ノイズレベルも高く求まる傾向がある. **BT** 法は, 例は示さなかったがプレホワイトニング係数の選び方が比較的微妙であるのに対し, **FFT** 法の結果は一般に安定している.

3) **AF** 法と **BG** 法を比較した場合, 同じ **FPE** クライテリオンで次数を決定しても, **BG** 法の方が高次で求まる傾向がある. その結果 **BG** 法の方がピークがするどく求まり, **AF** 法の方がノイズレベルがなめらかに求まる. また **BG** 法の方が **AF** 法に比べて, ノイズに強い傾向が見られる.

4) 2次元解析の場合, **BT** 法および **FFT** 法に対して, **AF** 法は, **S/N** 比の低いデータに対するスペクトル密度関数の推定にはおとるが, 2系列の相関を見る上においてはすぐれているように思われる. たとえば, フェイズにおいては比較的 **S/N** 比の低い時も正しい値を示しており, コヒーレンシイにおいては相関がない部分の値にばらつきが小さく, 一定して低めに求まるという利点をもっており, ポーラリゼーションにおいては, ノイズレベルが

安定しているので、意味のあるピークだけが見られ、すっきりしたポーラリゼーションの表現が得られるという利点を持っている。

5) 計算時間の比較を、512点のデータに対し、周波数分解能128点の場合について示す。1次元解析の場合、おおよそ3秒(BT)、1.5秒(FFT)、3秒(AF)および7秒(BG)を要し、2次元解析の場合、おおよそ13秒(BT)、5秒(FFT)、30秒(AF)を要している。ただし、これらはスペクトル計算以外の処理時間を含むもので、スペクトル計算そのものの比較ではなく、また、ウィンドウのちがいおよび対象とする時系列によって、モデル次数がちがうこと等によって若干ちがってくるので、大体のめやすとされたい。

5. お わ り に

このCSAPシステムの課題は、データの抽出、フィルター処理およびスペクトル解析等を一貫したシステムで、しかもグラフィックディスプレイを利用した会話形式で行えるということであった。現在、システムは完成し、その威力を発揮しつつある。表示の種類が豊富で、ハードコピーを手軽にとれるというのが何よりも強力である。データを任意に選べること、フィルターおよびスペクトル解析の手法がそろっていることも、使用してみて非常に便利であることがわかった。今後、必要に応じてフィルターおよびスペクトル手法等をさらに追加し、システムを拡張していきたい。また多量データに対するダイナミックシステムも、本システムの延長として今後の課題としていきたい。

時系列データの解析に関心のある方に大いにCSAPシステムを利用していただき、ご意見、ご批判をいただけることを期待する。

謝 辞

このシステムの開発にあたっては、東京大学理学部地球物理研究施設の国分征助教授に、そのアイデアの多くをいただきました。ここに深く感謝いたします。また、スペクトルプログラムについては、地質調査所の宮崎輝旗氏のご協力を、フィルターについては東京大学理学部地球物理大学院生の渋谷和夫氏、堀江晶子女史のご好意によりプログラムを提供していただきましたことを、仕様、結果の検討については、国立極地研究所の平沢威男、神沼克伊、福西浩、佐藤夏雄の各氏に助言、ご協力をいただきましたことをここに明記し、深く感謝いたします。

文 献

- 大内 徹・南雲昭三郎 (1975): Maximum entropy method の地震波解析への応用. 東京大学地震研究所彙報, **50**, 359-384.
- ULRYCH, T. J. and BISHOP, T. N. (1975): Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition. Rev. Geophys. Space Phys., **13**, 183-200.

(1978 年 4 月 10 日受理, 5 月 17 日改訂稿受理)

APPENDIX

1. フィルター処理

現在本システムには, チェビシェフフィルターが使われている. ここではチェビシェフフィルターの概要と必要なパラメータ等を説明する.

1.1. チェビシェフフィルターの周波数応答関数

フィルターの特性等を決める周波数応答関数 (伝達関数) は次式で定義される.

$$Y(f) = H(f)X(f).$$

ここで,

$$\begin{cases} H(f): & \text{周波数応答関数 (伝達関数)} \\ X(f): & \text{オリジナルデータのフーリエ変換} \\ Y(f): & \text{フィルターされたデータのフーリエ変換} \end{cases}$$

周波数応答関数 $H(f)$ は振幅 ($|H(f)|^2$) およびフェイズ ($\arg H(f)$) で特徴づけられるが, チェビシェフフィルターの振幅およびフェイズ特性を模式的に表わしたものを図 A-1, A-2 に示す. 図 A-1 でシグナルが通過する部分の振幅の最大値と最小値をリップル (Rip) と呼ぶ. F1 および F2 はカットオフ周波数, FH は振幅が 1/2 となる周波数でハーフパワーポイントという.

以下にチェビシェフフィルターの周波数応答関数を示す.

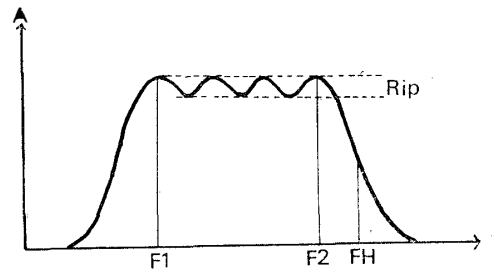


図 A-1 チェビシェフフィルターの振幅特性

Fig. A-1. Characteristics of amplitude of Chebyshev-filter.

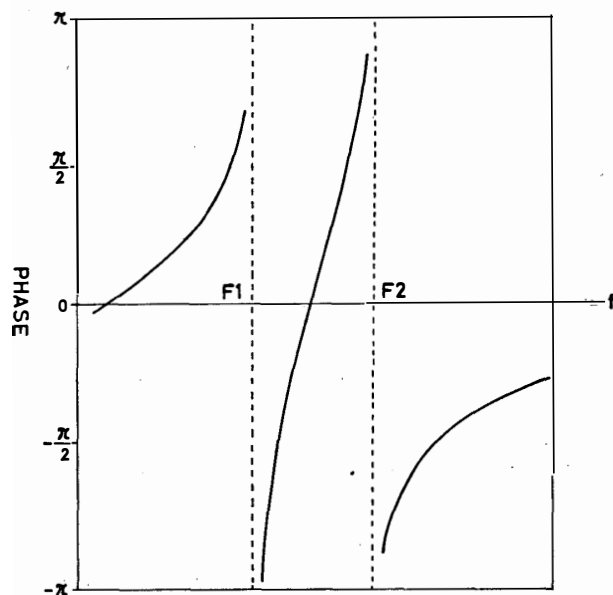


図 A-2 チェビシェフフィルターのフェイズ特性
Fig. A-2. Characteristics of phase of Chebyshev-filter.

1) high-cut フィルター

$$|H(f)|_{\text{h.c.}}^2 = \frac{1}{1 + \epsilon T_k^2 \left(\frac{\sin \pi \Delta t f}{\sin \pi \Delta t f_2} \right)}.$$

ここで、 $T_k(X)$ は k 次のチェビシェフ多項式である。すなわち、

$$T_0(X) = 1$$

$$T_1(X) = X$$

$$T_2(X) = 2X^2 - 1$$

$$T_3(X) = 4X^3 - 3X.$$

一般に、

$$T_{k+1}(X) = 2XT_k(X) - T_{k-1}(X).$$

ϵ はリップルを決めるパラメータでリップル $\cong 1/2 \cdot \epsilon^2$ ($\epsilon \ll 1$)。

f_1 はカットオフ周波数であり、 Δt はサンプリング時間である。

2) low-cut フィルター

$$|H(f)|_{\text{l.c.}}^2 = \frac{1}{1 + \epsilon T_k^2 \left(\frac{\sin \left(\pi \Delta t f - \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \pi \Delta t f_2} \right)}.$$

ここで、 $T_k(X)$ は k 次のチェビシェフ多項式、 ε はリップルを決めるパラメータ、 f_2 はカットオフ周波数、 Δt はサンプリング時間である。

3) band-pass フィルター

$$|H(f)|^2_{\text{b.p.}} = \frac{1}{1 + \varepsilon T_k^2 \left(\frac{\cos 2\pi \Delta t f - C}{S} \right)}$$

ここで、 Δt はサンプリング時間で、

$$C = \cos 2\pi \Delta t \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) \cos 2\pi \Delta t \left(\frac{f_2 - f_1}{2} \right)$$

$$S = \sin 2\pi \Delta t \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) \sin 2\pi \Delta t \left(\frac{f_2 - f_1}{2} \right).$$

ただし、 f_1, f_2 はカットオフ周波数。

また、 $T_k(X)$ は k 次のチェビシェフ多項式である。

4) band-reject フィルター

$$|H(f)|^2_{\text{b.r.}} = 1 - |H(f)|^2_{\text{b.p.}}$$

1.2. フィルター係数の決定および処理フロー

オリジナルデータ $\{x(s); s=1, 2, \dots\}$ に対し、フィルターされたデータ $\{y(s); s=1, 2, \dots\}$ は、一般に次のように求められる。

$$y(s) = \sum_{l_1=0}^{L_1} a_{l_1} x(s-l_1) + \sum_{l_2=1}^{L_2} b_{l_2} y(s-l_2).$$

ただし、 $\{a_{l_1}\}, \{b_{l_2}\}$: フィルター係数で、

$L_1, L_2 \leq k$: チェビシェフ多項式の次数。

このようにフィルター操作は、一般に時間領域で行われるので、周波数応答関数が与えられたら、それに対応する時間領域のフィルター係数を求めなければならない。フィルター係数は、周波数応答係数の分母が 0 となる特異点を求め、そのまわりで周波数応答関数を展開することにより求められる。詳しくは、ROBINSON and TREITEL (1964), SHANKS (1967) および OTNES and ENOCHSON (1972) を参照されたい。

以下にプログラムにおける処理フローを示す。

- 1) フィルター特性 k, ε の計算
- 2) 特異点の計算
- 3) フィルター係数の計算

4) データにフィルターをかける。

なお、チェビシェフフィルターはリカーシブフィルター（時間に対して対称でない）なので、図 A-2 に示すように一般にフィルターによって位相ずれが避けられない。本システムではフィルターを2回順方向および逆方向にかけることより位相ずれを少なくしている。

1.3. フィルターパラメータ

チェビシェフフィルターを利用する時に必要なパラメータを表 A-1 に示す。

フィルターのシグナル通過部分のフラットさおよびカット部分の切れのするどさは、 k および ϵ に依存するが、これは FH とリップルを与えることと同等である。F1 と F2 を与えた時、どういう値の FH とリップルを与えればよいかについては、はっきりしたことはいえない。

有限長のデータに対してフィルターをかけるので、フィルターされた時系列は両端でひずみを受ける。 $|F2-FH|$, $|F2-F1|$ が小さいほどひずみを受ける長さは大きくなる。

表 A-1 フィルターパラメータ

Table A-1. Filter parameters.

	High cut/low cut	Band pass/band reject
カットオフ周波数 : F1, F2 (F1 < F2)	F2 を指定 (F1=0.0 とおく)	F1, F2 を指定
ハーフパワーポイント : FH	F2 側で指定することにする	
リップル	3.0 以下の値を指定する (たとえば 0.02 など)	

2. スペクトル解析

本システムでは、スペクトル解析の手法として、一般に広く使われている Blackman-Tukey 法、Fast-Fourier-Transform 法および Maximum-Entropy Method (または Autoregressive Method) が組み込まれている。以下に、各手法の概要と計算に必要なパラメータ等の説明を行う。

2.1. Blackman-Tukey 法 (BT 法)

2 次元の定常時系列を

$$\{x(s), y(s); s=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N, \dots\}$$

とした時、相関関数およびスペクトル密度関数は、次のように定義される(赤池・中川, 1972)。

1) 相関関数

i) $l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に対して自己相関関数は,

$$R_{xx}(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \{x(s+l) - m_x\} \{x(s) - m_x\}$$

$$\text{ただし, } m_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N x(s)$$

と定義され, またスペクトル密度関数が与えられていれば,

$$\begin{aligned} R_{xx}(l) &= \sum_{r=-n_F}^{n_F} \exp\left(i 2\pi r \frac{1}{2n_F} l\right) P_{xx}(r) \\ &= P_{xx}(0) + 2 \sum_{r=1}^{n_F} \cos\left(2\pi r \frac{1}{2n_F} l\right) P_{xx}(r) \end{aligned}$$

ただし, n_F は, ナイキスト周波数に対応する

としても求まる. ここで,

$$R_{xx}(l) = R_{xx}(-l)$$

が成り立つ.

ii) $l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に対して相互相関関数は,

$$R_{xy}(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \{x(s+l) - m_x\} \{y(s) - m_y\}$$

$$R_{yx}(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \{y(s+l) - m_y\} \{x(s) - m_x\}$$

$$\text{ただし, } m_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N x(s)$$

$$m_y = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N y(s)$$

と定義され, またクロススペクトル密度関数が与えられていれば,

$$\begin{aligned} R_{xy}(l) &= \sum_{r=-n_F}^{n_F} \exp\left(i 2\pi r \frac{1}{2n_F} l\right) P_{xy}(r) \\ &= P_{xy}(0) + \sum_{r=1}^{n_F} \left[\exp\left(-i 2\pi r \frac{1}{2n_F} l\right) \{P_{xy}(r)\}^* \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(i 2\pi r \frac{1}{2n_F} l\right) P_{xy}(r) \right]. \end{aligned}$$

ただし, n_F は, ナイキスト周波数に対応する

として求まる. ここで,

$$R_{xy}(-l) = R_{yx}(l)$$

が成り立つ。

2) スペクトル密度関数

i) $r=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n_F$ に対してオートスペクトル密度関数は,

$$\begin{aligned} P_{xx}(r) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(-i 2\pi r \frac{1}{2n_F} l\right) R_{xx}(l) \\ &= R_{xx}(0) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \cos\left(2\pi r \frac{1}{2n_F} l\right) R_{xx}(l) \end{aligned}$$

として求まり, またデータを直接フーリエ変換して,

$$P_{xx}(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{s=-N}^N x(s) \exp\left(-i 2\pi r \frac{1}{2n_F} s\right) \right|^2$$

としても求まる。ここで,

$$P_{xx}(r) = P_{xx}(-r)$$

が成り立つ。

ii) $r=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n_F$ に対してクロススペクトル密度関数は,

$$\begin{aligned} P_{yx}(r) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(-i 2\pi r \frac{1}{2n_F} l\right) R_{yx}(l) \\ &= P_{yx}(0) + \sum_{l=1}^{\infty} \cos\left(2\pi r \frac{1}{2n_F} l\right) \{R_{xy}(l) + R_{yx}(l)\} \\ &\quad + i \sum_{l=1}^{\infty} \sin\left(2\pi r \frac{1}{2n_F} l\right) \{R_{xy}(l) - R_{yx}(l)\} \end{aligned}$$

として求まり, またそれぞれのデータを直接フーリエ変換して,

$$\begin{aligned} P_{yx}(r) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{s=-N}^N x(s) \exp\left(-i 2\pi r \frac{1}{2n_F} s\right) \right\}^* \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{s'=-N}^N y(s') \exp\left(-i 2\pi r \frac{1}{2n_F} s'\right) \right\} \end{aligned}$$

としても求まる。ここで,

$$P_{yx}(-r) = \{P_{yx}(r)\}^* = P_{xy}(r)$$

が成り立つ。

実際には無限に続く定常時系列が与えられるのではなく, 有限の時系列

$$\{x(s), y(s), s=1, 2, \dots, N\}$$

が与えられる。これらに定常性が仮定されるとした時, スペクトル密度関数および相関関数を推定する従来からの手法としては, まず相関関数を推定し, それをフーリエ変換してスペ

クトルを求める手法 (BT 法) と, 時系列データを直接フーリエ変換しそれを 2 乗してスペクトルを推定し, それを逆フーリエ変換して相関関数を求める手法 (FFT 法) がある. この節では BT 法について述べる.

有限の時系列データについて, BT 法による相関関数およびスペクトル密度関数の推定法は次の通りである.

1)° 相関関数

$l=0, 1, 2, \dots, L$ に対して,

$$\hat{R}_{xx}(-l) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-l} \{x(s+l) - \hat{m}_x\} \{x(s) - \hat{m}_x\}$$

$$\hat{R}_{xy}(l) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-l} \{x(s+l) - \hat{m}_x\} \{y(s) - \hat{m}_y\}$$

$$\hat{R}_{yx}(l) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-l} \{y(s+l) - \hat{m}_y\} \{x(s) - \hat{m}_x\}.$$

$$\text{ただし, } \hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N x(s)$$

$$\hat{m}_y = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N y(s).$$

2)° スペクトル密度関数

$r=0, 1, 2, \dots, n_F$ に対して,

$$\begin{aligned} \hat{P}_{xx}(r) &= \sum_{l=-L+1}^{L-1} \exp\left(-i2\pi r \frac{1}{2n_F} l\right) \hat{R}_{xx}(l) + (-1)^r \hat{R}_{xx}(L) \\ &= \hat{R}_{xx}(0) + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \cos\left(2\pi r \frac{1}{2n_F} l\right) \hat{R}_{xx}(l) + (-1)^r \hat{R}_{xx}(L) \\ \hat{P}_{yx}(l) &= \hat{R}_{yx}(0) + \frac{(-1)^l}{2} \{\hat{R}_{xy}(l) + \hat{R}_{yx}(l)\} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{L-1} \cos\left(2\pi r \frac{1}{2n_F} l\right) \{\hat{R}_{xy}(l) + \hat{R}_{yx}(l)\} \\ &\quad + i \sum_{l=1}^{L-1} \sin\left(2\pi r \frac{1}{2n_F} l\right) \{\hat{R}_{xy}(l) - \hat{R}_{yx}(l)\}. \end{aligned}$$

ここで, R_{xx} , R_{xy} 等の l についての対称性を用いており, ラグの長さを L で打ち切った効果を少なくするために, L での値を $1/2$ に落としてある.

相関関数を L で打ち切ったことによる周波数分解能は,

$$\Delta f \sim \frac{1}{2L}$$

であり、一方周波数区間 $(0, 1/2)$ を n_F 点で計算する時の分解能は、

$$\Delta f \sim \frac{1}{2n_F}$$

であるから、一般には、

$$n_F = L$$

とする。

3)° ウィンドウ

相関関数を有限ラグ L で打ち切ったということは、その外の相関関数をゼロと仮定したことと等しい。打ち切りの効果を少なくするために、一般にはウィンドウ操作が行われている。ウィンドウには、データウィンドウ、ラグウィンドウおよびスペクトルウィンドウがあるが、本システムの BT 法では、スペクトルウィンドウを使用している。ハニングおよびハミングのウィンドウを用意した。

4)° プレホワイトニング

相関関数を求め、それをフーリエ変換してスペクトルを求めるという操作における周波数依存性の影響を除くために、あらかじめデータをホワイトノイズ化し（一種のフィルター操作を行うことに等しい）、スペクトルを求めたあとで後処理をして（逆フィルターをかける）、真のスペクトルを推定する方法が一般にとられている。すなわち、時系列

$$\{x(1), x(2), x(3), \dots\}$$

を、時系列

$$\{x(2) - cx(1), x(3) - cx(2), \dots\}$$

におきかえて、計算する。普通、

$$c = 0.6 \sim 0.75$$

がとられている。

5)° 推定誤差

スペクトル密度関数の推定において、周波数分解能およびスペクトルの標準偏差は次の通りである。

$$\text{周波数分解能} \sim \frac{1}{2L\Delta t}$$

ただし、 L は相関関数の最大ラグの長さで、 Δt はサンプリング時間である。

$$\text{標準偏差} \sim \sqrt{\frac{L}{N}} \cdot (\text{スペクトル密度}).$$

ただし N はデータ数である。

2.2. Fast Fourier Transform 法 (FFT 法)

時系列データを直接フーリエ変換し、それを 2 乗してスペクトル密度関数を推定する場合、 N を大きくすればするほどランダムノイズによる分散も \sqrt{N} に比例して大きくなる。そこで母集団に対する平均化が必要であるが、代わりに時間に対して平均化の操作を行って、スペクトルを推定する方法がとられている (WELCH, 1967)。すなわち図 A-3 のように、 N 個の与えられた時系列を長さ $2L'$ の基本時系列 M 個に分割し、それぞれのスペクトル密度関数を計算し、その平均値を、スペクトル密度関数の推定値とする。この手法は、計算時間およびメモリの縮小化においても有利である。

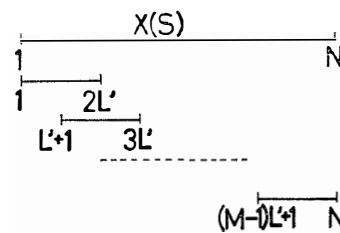


図 A-3 FFT 法における時系列データの分割

Fig. A-3. Illustration of record segmentation in FFT method.

1)° スペクトル密度関数

$r=0, 1, 2, \dots, n_F$ に対して,

$$\hat{P}_{xx}(r) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{2L'} \left| \sum_{s=1}^{2L'} x_m(s) \exp \left(-i 2\pi r \frac{1}{2n_F} s \right) \right|^2$$

$$\hat{P}_{yx}(r) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{2L'} \left[\left\{ \sum_{s=1}^{2L'} x_m(s) \exp \left(-i 2\pi r \frac{1}{2n_F} s \right) \right\}^* \right. \\ \left. \times \left\{ \sum_{s'=1}^{2L'} y_m(s') \exp \left(-i 2\pi r \frac{1}{2n_F} s' \right) \right\} \right]$$

ここで,

$$\Delta f = \frac{1}{2L'} = \frac{1}{2n_F}$$

であるので,

$$n_F = L'$$

である。また FFT のアルゴリズムを用いて計算することから、

$$2L' = 2^k \quad (k \text{ は正の整数})$$

でなければならない.

2)° 相関関数

$l=0, 1, 2, \dots, L$ に対して,

$$\hat{R}_{xx}(l) = \sum_{r=-L'}^{L'} \exp\left(i 2\pi r \frac{1}{2L'} l\right) \hat{P}_{xx}(r)$$

$$\hat{R}_{xy}(l) = \sum_{r=-L'}^{L'} \exp\left(i 2\pi r \frac{1}{2L'} l\right) \hat{P}_{yx}^*(r)$$

$$\hat{R}_{yx}(l) = \sum_{r=-L'}^{L'} \exp\left(i 2\pi r \frac{1}{2L'} l\right) \hat{P}_{yx}(r).$$

ここで明らかなように,

$$L = L'$$

まで求められる.

3)° ウィンドウ

有限のデータに対して直接フーリエ変換することは、その外のデータに対し周期性を仮定することと等しい. このようなデータの有限性による影響を少なくするために、一般にはウィンドウ操作が行われている. ウィンドウにはデータウィンドウおよびスペクトルウィンドウがあるが、本システムの FFT 法ではデータウィンドウを使用している. ハニング, ハミングおよび spheroidal prolate ウィンドウ (THOMSON *et al.*, 1976) を用意した.

4)° 推定誤差

スペクトル密度関数の推定において、周波数分解能およびスペクトル標準偏差は次の通りである.

$$\text{周波数分解能} \sim \frac{1}{2L\Delta t}.$$

ただし、 L は基本時系列の長さの $1/2$ で、相関関数の最大ラグの長さに等しく、 Δt はサンプリング時間である.

$$\text{標準偏差} \sim \sqrt{\frac{11M-1}{10M^2}} \cdot (\text{スペクトル密度}).$$

ただし、 M は基本時系列の数で、データ数を N とすると、

$$M = \frac{2N}{L} - 1$$

で与えられる.

2.3. MEM 法 (AR 法) I-AF 法

Appendix 2.1., 2.2. で述べたように、実際の有限長のデータを扱う時、BT 法や FFT 法においては、ウィンドウの問題が伴ってくる。つまり、BT 法においては、与えられない相関関数を 0 と仮定しており、FFT 法においては、ピリオドグラムの外にデータに対し、周期性を仮定しているため、その影響を少なくするために、ウィンドウを考慮する必要がある。MEM (Maximum-Entropy Method) においては、与えられた有限の相関関数を用いて、未知の相関関数を、情報論的エントロピー最大、いわゆる Maximum-Entropy のように推定しているため、ウィンドウの問題はない。この Maximum-Entropy の立場から求めたパワースペクトルは、自己回帰モデル (Auto-Regressive Method) から求めたものと、同等であることが証明されており、それは次式で与えられる (ULRYCH and BISHOP, 1975).

$$P(f) = \frac{P_M}{2f_N} \left| 1 + \sum_{n=1}^M a_n e^{-i2\pi f n \Delta t} \right|^{-2}$$

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t} : \text{Nyquist frequency}$$

$(1, a_1, a_2, \dots, a_M)$: 予測フィルター

P_M : 予測誤差の分散

ここで次数 M の決定については、赤池・中川 (1972) による FPE (final prediction error) クライテリオンを標準として用いることにする。これは自己回帰モデルに対し、最尤法 (most likelihood) の立場から導きだされたもので、次式で与えられる。

$$\text{FPE} = E [(x(s) - \hat{x}(s))^2]$$

$x(s)$: 真の値

$\hat{x}(s)$: モデルによる予測値

$$= \frac{N + (M + 1)}{N - (M + 1)} S_M^2$$

N : データ数

M : モデルの次数

S_M^2 : 予測誤差の分散。

FPE 値が最小となる次数 M を、最も良いモデルとして採用する。

予測誤差フィルターを求める方法としては、相関関数を計算して Yule-Walker の方程式を解く方法 (AF 法と呼ぶ) と、Burg のアルゴリズムを用いて解く方法 (BG 法と呼ぶ) があり、この節では、AF 法について述べる。

自己相関関数,

$$R_{xx}(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \{x(s+l) - m_x\} \{x(s) - m_x\}$$

$$m_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N x(s)$$

が与えられた時, M 次の自己回帰モデルに対し, これらの自己共分散関数 $R_{xx}(l)$ ($l=0, 1, \dots, M$) と, 係数 $a_M(m)$ ($m=1, 2, \dots, M$) との関係は, Yule-Walker の方程式と呼ばれている次式で表わされる.

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \dots & R(M-1) \\ R(1) & R(0) & \dots & R(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(M-1) & R(0) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_M(1) \\ a_M(2) \\ \vdots \\ a_M(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(M) \end{pmatrix}$$

各次数について, それぞれこの方程式を解くのは大変であるが, Levinson の手続きにより, 1 次から順々に求めていくことができる (赤池・中川 1972).

1)° 自己相関関数の推定値を求める.

$l=0, 1, 2, \dots, MMAX$ に対して,

$$\hat{R}(l) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-l} \{x(s+l) - \hat{m}_x\} \{x(s) - \hat{m}_x\}$$

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N x(s).$$

2)° $a_0(1)=0, \sigma^2(0)=\hat{R}(0)$ とおく.

3)° $M=1, 2, \dots, MMAX$ に対して, 逐次,

$$i) \quad a_M(M) = \frac{1}{\sigma^2(M)-1} \{ \hat{R}(M) - \sum_{m=1}^{M-1} a_{M-1}(m) \hat{R}(M-m) \}$$

ただし, $M=1$ の時, 第 2 項=0.

ii) $m=1, 2, \dots, M-1$ に対し,

$$a_M(m) = a_{M-1}(m) - a_M(N) a_{M-1}(M-m)$$

iii) $\sigma^2(M) = \sigma^2(M-1) [1 - \{a_M(M)\}^2]$

$$iv) \quad \text{FPE}(M) = \frac{N+M+1}{N-M-1} \sigma^2(M)$$

を求める.

4)° スペクトル密度関数の推定値を, $r=0, 1, 2, \dots, n_F$ に対して, 次式により求める.

$$\hat{P}_{xx}(r) = \frac{\sigma^2(M)}{\left| 1 - \sum_{m=1}^M a_M(m) \exp\left(-i 2\pi \frac{r}{2n_F} m\right) \right|^2}$$

M : FPE 最小の次数

$a_M(m)$: M 次の予測フィルター

$\sigma^2(M)$: M 次の予測誤差の分散

n_F : 計算する周波数ポイント数

5)° 推定誤差

MEM 法 (または AR 法) によるスペクトル推定の大きな欠点は、分散等の情報の欠如にあった。しかし KROMER らによって、漸近的なふるまいについては統計的誤差のみつもりが検討されている (ULRYCH and BISHOP, 1975)。スペクトルの標準偏差は次の通りである。

$$\text{標準偏差} \sim \sqrt{\frac{2N}{M}} \cdot (\text{スペクトル密度}).$$

ただし、 M はモデルの次数、 N はデータの数である。この式は M と N が大きく、しかも真のスペクトルがなめらかである時に限って成立する。

以上 1)°~5)° に述べたことは、2次元の解析においてもそのまま拡張することができる (赤池・中川, 1972)。

2.4. MEM 法 (AR 法) II—BG 法

Burg のアルゴリズムでは、自己相関関数を計算しないで、直接にフィルターの係数を決定する。その際、Levinson の手続きを用い、データをふるに利用するために、前後両方向にフィルターを走らせて、その予測誤差の 2 乗平均を最小にするように、係数を決定している (SMYLIE *et al.*, 1973; ANDERSON, 1974)。

1)° 初期値の設定

i) $R(0) = \sigma^2(0)$

ii)
$$a_1(1) = \frac{2 \sum_{s=1}^{N-1} x(s)x(s+1)}{\sum_{s=1}^{N-1} [\{x(s)\}^2 + \{x(s+1)\}^2]}$$

$$\sigma^2(1) = [1 - \{a_1(1)\}^2] \sigma^2(0)$$

iii) $s = 1, 2, \dots, N-1$

$$\varepsilon^f_1(s+1) = x(s+1) - a_1(1)x(s)$$

$$\varepsilon^b_1(s) = x(s) - a_1(1)x(s+1)$$

2)° $M=2, 3, \dots, MMAX$ に対して, 逐次,

$$i) \quad a_M(M) = \frac{2 \sum_{s=1}^{N-M} \varepsilon^f_{M-1}(s+M) \varepsilon^b_{M-1}(s)}{\sum_{s=1}^{N-M} (|\varepsilon^f_{M-1}(s+M)|^2 + |\varepsilon^b_{M-1}(s)|^2)}$$

ii) $m=1, 2, \dots, M-1$ に対して,

$$a_M(m) = a_{M-1}(m) - a_M(M) a_{M-1}(M-m)$$

iii) $\sigma^2(M) = \sigma^2(M-1) [1 - \{a_M(M)\}^2]$

$$iv) \quad R(M) = \sum_{m=1}^M a_M(m) R(M-m)$$

自己相関関数が求まる.

v) $s=1, 2, \dots, N-M$ に対して,

$$\varepsilon^f_M(s) = \varepsilon^f_{M-1}(s+M) - a_M(M) \varepsilon^b_{M-1}(s)$$

$$\varepsilon^b_M(s) = \varepsilon^b_{M-1}(s) - a_M(M) \varepsilon^f_{M-1}(s+M)$$

$$vi) \quad FPE(M) = \frac{N+M+1}{N-M-1} \sigma^2(M)$$

3)° スペクトル密度関数の推定値は, Appendix 2.3. の 4)° と同様にして求める.

4)° 推定誤差

Appendix 2.3. の 5)° と同様.

Burg のアルゴリズムの 2 次元への拡張は, いろいろと試みられているが, AF 法ほど確立されていないようなので, 今回はまだとりいれていない.

2.5. クロスパラメータ

2 次元データの場合, スペクトル密度関数から次のような量を計算することができる.

1) クロススペクトルの絶対値

$$r=0, 1, 2, \dots, n_F \text{ に対して,}$$

$$|P_{yx}(r)|$$

2) 周波数応答関数の絶対値

$$r=0, 1, 2, \dots, n_F \text{ に対して,}$$

$$|A(f)| = \left| \frac{P_{yx}(f)}{P_{xx}(f)} \right| = \frac{|P_{yx}(f)|}{P_{xx}(f)}$$

$x(s)$ を入力, $y(s)$ を出力とし, $y(s)$ 中に含まれる $x(s)$ と線形に対応する部分を $y'(s)$ とする時 (つまり $y(s) = y'(s) + n(s)$: $n(s)$ は $x(s)$ と線形な関係にない部分),

$$P_{y'y'} = |A(f)|^2 P_{xx}$$

とかける.

3) フェイズ (Phase, 位相)

$r=0, 1, 2, \dots, n_F$ に対して,

$$\varphi(r) = \arg \{P_{yx}(r)\}$$

$$\begin{cases} \varphi > 0 : y \text{ の方が進んでいる} \\ \varphi < 0 : x \text{ の方が進んでいる} \end{cases}$$

4) コヒーレンシイ (coherency)

$r=0, 1, 2, \dots, n_F$ に対して,

$$\gamma(r) = \sqrt{\frac{|P_{yx}(r)|^2}{P_{xx}(r) P_{yy}(r)}}$$

これは出力 $y(s)$ の中で入力 $x(s)$ と線形な関数にある部分 $y'(s)$ の占める割合を与える. すなわち,

$$\gamma^2(r) = \frac{P_{y'y'}(r)}{P_{yy}(r)}$$

が成立する.

5) ポーラリゼーションパラメータ (偏波特性)

相関行列 J を次のように定義する時,

$$J \simeq \int_{\Delta} P(f) df$$

ただし, Δ はそれぞれの波の半値幅程度を示し, $P(f)$ はスペクトル行列で,

$$P(f) \sim \begin{pmatrix} P_{xx}(f) & P_{xy}(f) \\ P_{yx}(f) & P_{yy}(f) \end{pmatrix}$$

で与えられる.

次のようなパラメータが定義される (RUNKIN and KURTZ, 1970).

i) peak での Q-value = $\frac{f_0}{\Delta f}$

ただし f_0 はピークの中心周波数で Δf はピークの半値幅である。

$$\text{ii) 偏波度 (polarization)} = \frac{\text{偏波強度}}{\text{全強度}} = \sqrt{1 - \frac{4 \text{Det} \langle J \rangle}{\text{Tr}^2 \langle J \rangle}}$$

$$\text{iii) 偏波の主軸の方向 (orientation)} = \frac{1}{2} \tan^{-1} [2\text{Re}(J_{yx}) / (J_{xx} - J_{yy})]$$

$$\text{iv) 扁平度 (ellipticity)} = \tan |\beta|$$

$$\text{ただし, } \beta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{2 \text{Im}(J_{yx})}{J_{xx} + J_{yy}} \right) \text{ で,}$$

その符号は回転の方向を表わす。

$$\begin{cases} \beta > 0 : \text{右まわり} \\ \beta < 0 : \text{左まわり} \end{cases}$$

2.6. スペクトルパラメータ

CSAP システムを使用してスペクトル計算を行う場合、必要なパラメータを表 A-2 に示す。

表 A-2 スペクトルパラメータ
Table A-2. Spectral parameters.

パラメータ \ 手法	BT 法	FFT 法	AF 法	BG 法
相関関数の長さ: L	○	○ (2 の階乗)	○ (モデルをスキップする最大次数)	○ (モデルをスキップする最大次数)
周波数分解能: n_F	△ $n_F = L$	△ $n_F = L$	○	○
ウィンドウコード	○	○	×	×
クライテリオンコード	×	×	○	○
プレホワイトニング係数	○	×	×	×

ただし, ○: 必要, ×: 不必要, △: 省略可

Appendix の文献

- 赤池弘次・中川東一郎 (1972): ダイナミックシステムの統計的解析と制御. サイエンス社, 189p. (サイエンスライブラリ情報計算機=9)
- ANDERSON, N. (1974): On the calculation of filter coefficients for maximum entropy analysis.

- Geophysics, **39**, 69-72.
- OTNES, R. K. and ENOCHSON, L. (1972): Digital Time Series Analysis. New York, Wiley, 66-136.
- RANKIN, D. and KURTZ, R. (1970): Statistical study of micropulsation polarizations. J. Geophys. Res., **75**, 5444-5458.
- ROBINSON, E. A. and TREITEL, S. (1964): Principles of digital filtering. Geophysics, **29**, 395-404.
- SHANKS, J. L. (1967): Recursion filters for digital processing. Geophysics, **32**, 33-51.
- SMYLIE, D. E., CLARKE, G. K. C. and ULRYCH, T. J. (1973): Analysis of irregularities in the earth's rotation. Methods in Computational Physics, **13**, ed. by B. ALDER. New York, Academic Press, 391-430.
- THOMSON, D. J., ROBBINS, M. F., MACLENNAN, C. G. and LANZEROTTI, L. J. (1976): Spectral and windowing techniques in power spectral analysis of geomagnetic data. Phys. Earth Planet. Interiors, **12**, 217-231.
- ULRYCH, T. J. and BISHOP, T. N. (1975): Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition. Rev. Geophys. Space Phys., **13**, 183-200.
- WELCH, P. D. (1967): The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. IEEE on AU-15, **2**, 70-73.