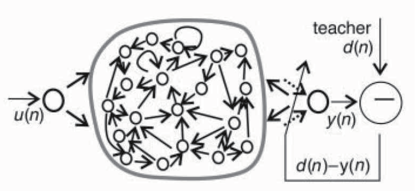
機械学習による地磁気変動予測

S. Nakano (The Institute of Statistical Mathematics)

20 feb 2023

Echo state network (ESN)

- 機械学習 ⟶ 実際には echo state network (ESN) の応用の話．
- ESN は，リザーバコンピューティングの一種．
- 状態変数間の結合と重みは，ランダムに設定し，固定．
- 出力に変換する重みのみを，データに基づいて決める．これは基本的には単純な回帰で決まる．



(Jaeger & Haas, Science, 2004)

Echo state network (ESN)

時刻 t_k における ESN の状態変数をまとめたベクトルを $\boldsymbol{x}_k$ とする．各時間ステップで，$\boldsymbol{x}_k$ の i 番目の要素を $x_{k,i}$ は，

$$x_{k,i} = (1-\xi)x_{k-1,i} + \xi \tanh\left(\boldsymbol{w}_i^\top \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{u}_i^\top z_k + \eta_i\right) \tag{1}$$

のように更新される．但し，

- z_k: 入力変数をまとめたベクトル,
- $\boldsymbol{w}_i$: 状態変数間をつなぐ重みのベクトル,
- $\boldsymbol{u}_i$: 入力変数と状態変数の関係を定める重みのベクトル.

ESN では，重み $\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{u}_i$ をランダムに与えて固定する．時刻 t_k の出力 y_k は，以下の式で得る:

$$y_k = \boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{x}_k. \tag{2}$$

Echo state network (ESN)

出力 $y_k = \boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}_k$ を決める重み $\boldsymbol{\beta}$ は観測データに基づいて決める．時刻 t_k の観測データを d_k とおき，以下の J を最小化する:

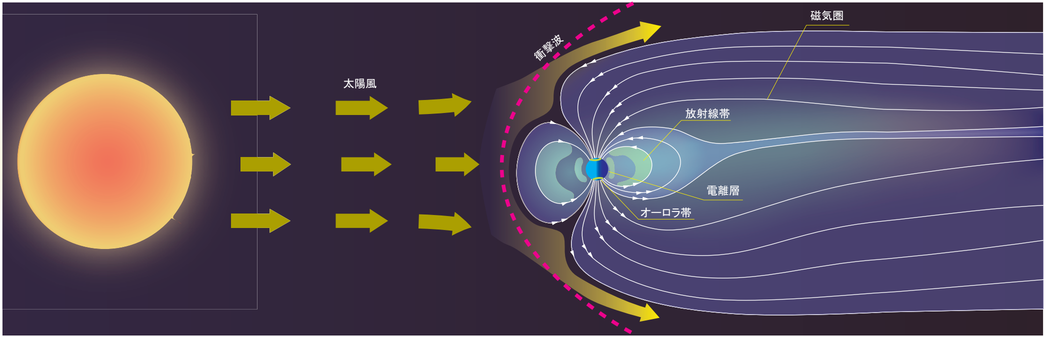
$$J = \sum_{k=1}^{K} \left\| d_k - \boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}_k \right\|_2^2 + \lambda^2 \|\boldsymbol{\beta}\|_2^2. \tag{3}$$

出力 y_k を z_k にフィードバックしない場合，$\boldsymbol{x}_k$ は先程の漸化式

$$x_{k,i} = (1-\xi)x_{k-1,i} + \xi \tanh\left(\boldsymbol{w}_i^\mathsf{T}\boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{u}_i^\mathsf{T} z_k + \eta_i\right)$$

より，入力 z_k の時系列を与えれば，deterministic に決まるので，$\boldsymbol{\beta}$ だけを J の最小化で決めればよい．(いわゆるリッジ回帰になり，$\boldsymbol{\beta}$ は解析的に求まる．)

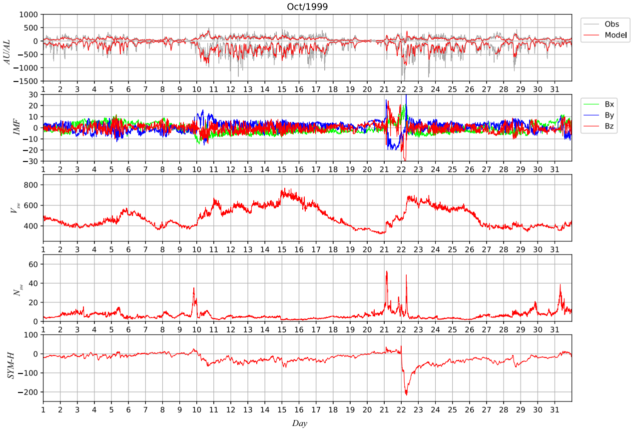
オーロラ活動の解析



オーロラは，太陽風のエネルギーが磁気圏に蓄積された後，解放されて発生すると言われている．したがって，太陽風の状態の履歴がオーロラ活動に影響すると考えられ，ESN の適用に向いたシステムと思われる．

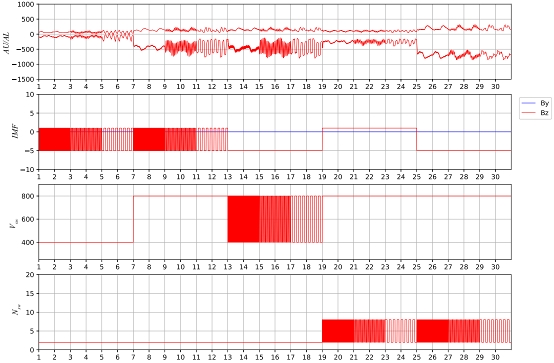
オーロラジェット電流の再現

- 出力: オーロラジェット電流の指数 (AU, AL).
- 入力: 太陽風の物理量 (B_x, B_y, B_z, V, N, T), $\cos\left(\frac{h}{12}\right), \sin\left(\frac{h}{12}\right), \cos\left(\frac{d}{365.24}\right), \sin\left(\frac{d}{365.24}\right)$ (h は universal time [hour], d はある起点からの通算の日数). AU, AL 指数 (出力の AU, AL をフィードバック).
- $\Delta t = 5$ 分.



(Nakano & Kataoka, Ann. Geophys., 2022)

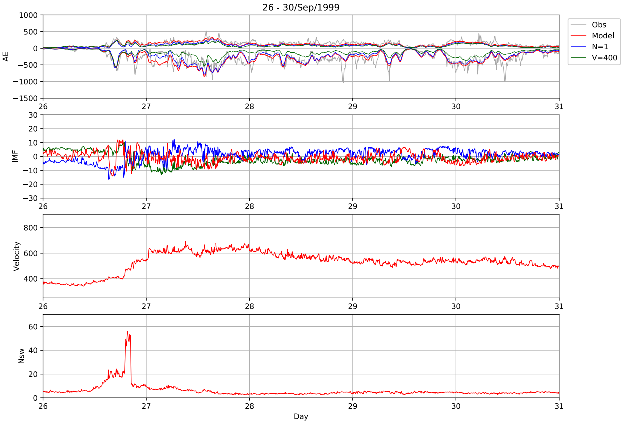
人工太陽風データによる解析



訓練した ESN に，人工太陽風データを入力し，その応答を見る．

オーロラジェット嵐の影響

- 大まかな構造は ESN で再現できるが，細かいスパイク状の変化 (オーロラ嵐，サブストーム) が再現できない．
- オーロラ嵐の発生は，太陽風の入力に対して deterministic には予測できない可能性がある．
- オーロラ嵐の発生時刻をリストにしたデータがあるので，オーロラ嵐の発生を非定常ポアソン過程として扱い，発生時刻データを解析する．



非定常ポアソン過程

微小時間 dt の間にイベントが発生する確率を $\nu(t|\theta)dt$ とする．ここで，β は強度関数 ν の形状を決めるパラメータである．イベント発生時刻の系列 $\tau_{1:N} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N\}$ が与えられたとき，パラメータ β の尤度は，

$$L(\beta) = p(\tau_{1:N}|\beta) = \prod_{i=1}^{N} \nu(\tau_i|\beta) \exp\left[-\int_{t_0}^{t_K} \nu(t|\beta)\, dt\right]. \tag{4}$$

但し，t は時間，N はイベント数を表す．したがって，対数尤度は，

$$\log L(\beta) = \sum_{i=1}^{N} \log \nu(\tau_i|\beta) - \int_{t_0}^{t_K} \nu(t|\beta)\, dt. \tag{5}$$

式 (5) を時間で離散化すると，以下を得る

$$\log L(\beta) = \sum_{i=1}^{N} \log \nu(\tau_i|\beta) - \sum_{k=0}^{K-1} \nu(t_k|\beta)\Delta t, \tag{6}$$

但し $t_k = t_0 + k\Delta t$.

ESN の利用

ここで，強度関数 ν の推定に ESN を利用する (Nakano et al., to be submitted)．ESN の状態変数 $\boldsymbol{x}_k$ に対して，

$$\nu(t_k|\boldsymbol{\beta}) = \exp(\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}_k) \tag{7}$$

とする．重み β はベイズ的に決めることにし，事前分布を

$$p(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^m}} \exp\left[-\frac{\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}\boldsymbol{\beta}}{2\sigma^2}\right], \tag{8}$$

と与える．但し，$m = \dim \boldsymbol{x}_k$. 標準偏差は $\sigma = 2$ と設定. このとき事後分布は，

$$p(\boldsymbol{\beta}|\tau_{1:N}) = \frac{p(\tau_{1:N}|\boldsymbol{\beta})\, p(\boldsymbol{\beta})}{p(\tau_{1:N})}. \tag{9}$$

で得られるので，これを最大化するように β を決める．

対数事後確率密度

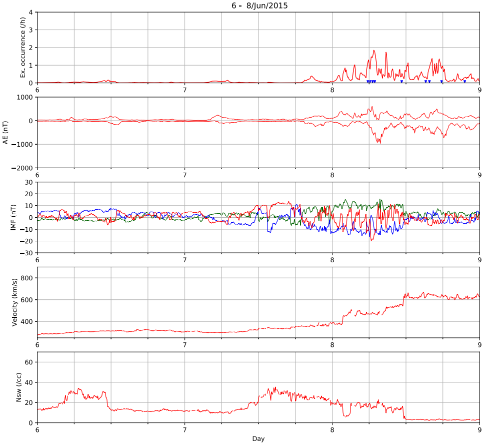
事後確率密度を最大にするには，以下の目的関数を最大にする β を求めればよい:

$$
\begin{aligned}
J &= \log\left[p(\tau_{1:N}|\boldsymbol{\beta})\, p(\boldsymbol{\beta})\right] \\
&= \log L(\boldsymbol{\beta}) + \log p(\boldsymbol{\beta}) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \log \nu(\tau_i|\boldsymbol{\beta}) - \sum_{k=0}^{K-1} \nu(t_k|\boldsymbol{\beta})\Delta t - \frac{\boldsymbol{\beta}^\top\boldsymbol{\beta}}{2\sigma^2} - \frac{m}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{x}_{k_i} - \sum_{k=0}^{K-1} \exp(\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{x}_k)\Delta t - \frac{\boldsymbol{\beta}^\top\boldsymbol{\beta}}{2\sigma^2} - \frac{m}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

恐らく，解析的に β を求めることはできないが，Newton 法で求めることができる．

解析

- 出力: オーロラ嵐の発生頻度 (ν).
- 入力: 太陽風の物理量 (B_x, B_y, B_z, V, N, T)，$\cos\left(\frac{h}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{h}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{d}{365.24}\right)$, $\sin\left(\frac{d}{365.24}\right)$ (h は universal time [hour], d はある起点からの通算の日数).
- イベント時系列: SML 指数から得られたサブストームリスト (Newell & Gjerloev, J. Geophys. Res., 2011)
- 状態変数の数は 1000. $\Delta t = 5$ 分.
- 2005–2014 年のデータで学習.
  2015–2018 年のデータで検証.



モデルの評価

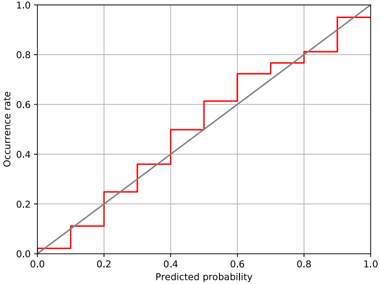


Figure 1: The actual occurence rate with respect to the predicted probability for the substorms in the four years from 2015 to 2018 (red). The line of the equality between the predicted probability and the actual occurrence rate (gray).

1 時間でイベントが発生する確率を

$$P_k = 1 - \exp\left[- \int_{t_k}^{t_{k+1}} \nu(t|\boldsymbol{\theta})\, dt \right]$$

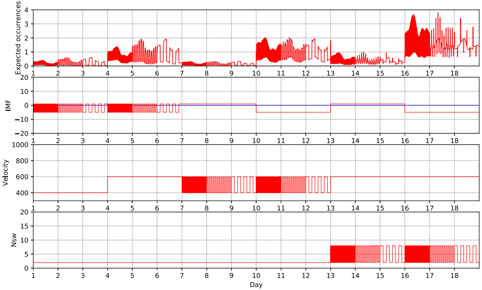
から計算し，その Brier スコア

$$B = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} (r_k - P_k)^2$$

を求める．但し，r_k は $t_k \leq t < t_{k+1}$ の間にイベントが観測されれば $r_k = 1$, そうでなければ $r_k = 0$．

計算すると Brier スコアは 0.10．定常ポアソン過程を仮定すると 0.14.

人工太陽風データによる解析



サブストームイベントリストで訓練した ESN に，人工太陽風データを入力し，その応答を見る．

まとめ

- Echo state network (ESN) を用いて，太陽風の入力に対する極域のオーロラジェット電流の応答を調べる枠組みを構築した．
- おおまかなオーロラジェット電流の挙動は，ESN をそのまま適用すれば再現できる．
- オーロラ嵐に伴う突発的な変動は，再現が難しいが非定常ポアソン過程として扱うことで，ある程度，確率的な挙動は再現できそうである．