



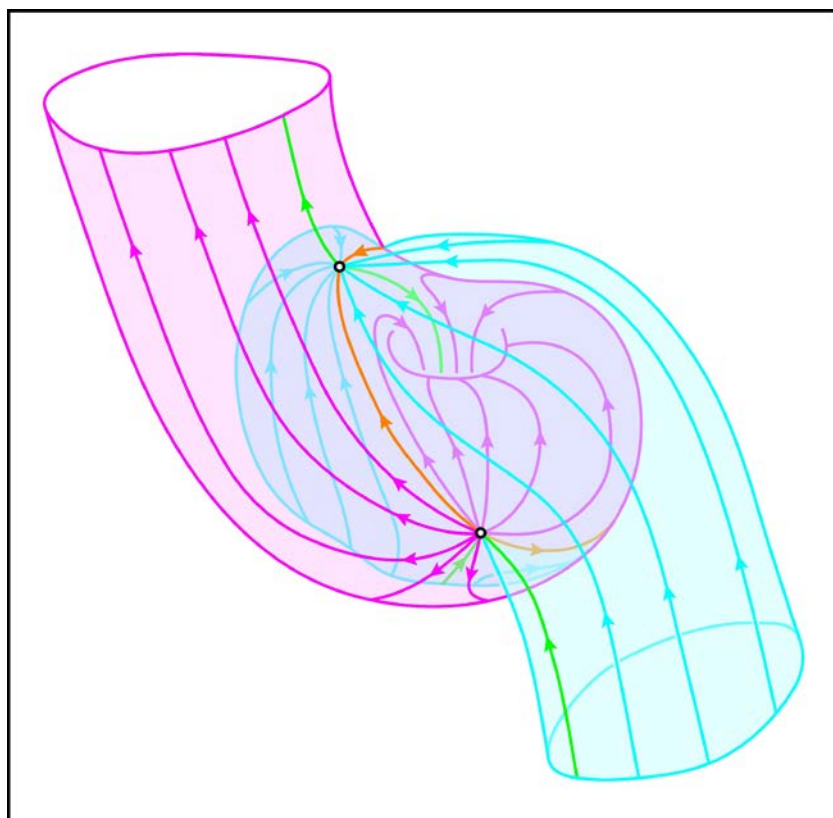
極地研電子ライブラリー

National Institute of Polar Research Electronic Library

オーロラ物理学シリーズ④

磁気圏ダイナモと 磁気圏磁場トポロジー

渡辺正和 著



大学共同利用機関法人 情報・システム研究機構
国立極地研究所

巻頭言

本書「磁気圏ダイナモと磁気圏磁場トポロジー」は、「複合系磁気圏物理学」（田中高史著、極地研究電子ライブラリー・オーロラ物理学シリーズ・第1巻）に続くシリーズ2作目である。2020年現在執筆が進められている第2巻と第3巻の完成を待たず、先に完成した第4巻から出版することとなった。著者の渡辺正和氏は、国立極地研究所の共同利用を介して、多くの研究者とオーロラに関する共同研究を一貫して進めている。本書は、その長年の共同研究成果の結晶とも言える。

オーロラには、地球大気での電力消費が伴っている。この電力の元になる発電は、磁気圏全体という非常に広大な領域で起こっているため、人工衛星等による限られた観測からでは、その全体像の把握は困難である。本書の前半、第1部では、磁気流体力学を基礎方程式とし、オーロラ活動を再現したシミュレーション結果を念頭に置くことで、その発電作用である「ダイナモ」に関する研究成果について解析的に解説している。オーロラの発電はプラズマの熱を電気に変えるものであり、従来考えられていたプラズマの流れを電気に変える発電というのは、特殊な場合でしか起こらないという研究成果が端的にまとめられている。

太陽風の磁場が地磁気と逆向きの場合にオーロラ活動が活発になることは、反対向きの磁力線がつながり、いわゆるリコネクションという概念を介して説明されることが多い。このことから、磁気圏の持つ基本的な性質を直観的に捉えるには、磁力線の構造を用いることが有用であることがわかる。しかし、実際の磁場の構造は立体的であるため、平面的なリコネクションの理解を一步進めて3次元的な磁力線の構造を解析する必要がある。本書の第2部は、この磁場の「トポロジー」の基本事項について解説するとともに、実際に観測されるオーロラとの対応など先端的な研究成果と謎を提示するものである。

著者の渡辺氏は、もともと極地研の職員でもある。まだ東京都板橋区に極地研があった時代、これは約20年前の個人的なことだが、東北大学からの受託学生として極地研に短期滞在した初学者の私に、専用のワークステーションで動くスーパーダーンのデータ解析ソフトの使い方を、根気よく丁寧に、わかりやすく教えて頂いたことを今でも覚えている。本書も、やはり大学院生を意識して、数式をふんだんに用いて根気よく丁寧に、複雑な問題について非常にわかりやすい解説を与えるものであり、また類書の見当たらないユニークなものとなっている。これから活躍する研究者が、本書の知識を基礎として、さらに発展的な研究に大いに役立てられることを期待している。

編集担当者 片岡龍峰 2020年12月1日

目次

第1部 大規模電流系を駆動する磁気圏ダイナモ	5
1章 磁気流体力学 (MHD) : 大規模現象を記述する基本ツール	6
1.1 ガリレイ電磁気学	6
1.1.1 ローレンツ変換とマクスウェル方程式	6
1.1.2 ガリレイ変換とマクスウェル方程式	9
1.1.3 ガリレイ相対論との整合	12
1.1.4 ガリレイ不変のすすめ	13
1.2 MHD 擾乱の固有モード	15
1.3 エネルギー保存則	17
2章 沿磁力線電流源とダイナモ	20
2.1 沿磁力線電流源に内在するダイナモ	20
2.2 沿磁力線電流を生む空間構造	23
付録	28
A2.1 2 階テンソルの規約分解	28
A2.2 Vasyliunas 方程式のオイラーポテンシャルによる導出	29

3 章 ダイナモの一般論	30
3.1 熱エネルギーを電磁エネルギーに変換するダイナモ	30
3.2. スローモードダイナモの制約	35
3.2.1 膨張するスローモードダイナモ	35
3.2.2 収縮するスローモードダイナモ	36
3.2.3 スローモードダイナモにおける制約のまとめ	38
3.3 線形解析	38
4 章 ダイナモと沿磁力線電流源の結合	42
4.1 結合の基本的空間構造	42
4.2 沿磁力線電流源-ダイナモ結合の解析	44
4.3 実効的沿磁力線電流源: 磁力線と電流線の解離	47
第 1 部の引用文献	49
第 2 部 磁場トポロジーから観る地球磁気圏	52
5 章 零点の局所構造: トポロジー解析の第 1 ステップ	53
5.1 ポテンシャル磁場が作る零点	53
5.2 電流がある場合の零点	57
5.2.1 一般の磁場勾配テンソル	57
5.2.2 Fan がらせん構造になる場合 ($ j_{\parallel} > j_c$)	61

5.2.3 Fan が傾く場合 ($j_{\perp} \neq 0$)	63
5.3 まとめ	64
6 章 零点の結合:トポロジー解析の第2ステップ	66
6.1 大域的トポロジー	66
6.2 ヘテロクリニックな鞍点結合	66
6.3 ホモクリニックな鞍点結合	67
6.4 横断的鞍点結合	68
6.5 シミュレーションで現れる鞍点結合の例: ローレンツアトラクターとのアナロジー ...	70
7 章 磁気圏の大域的磁場トポロジー	76
7.1 2-零点, 2-セパレータ構造: 双極子磁場と一様磁場の重ね合わせ	76
7.2 IMF の向きが切り替わるときのトポロジー	84
8 章 トポロジーで解釈する電離圏対流	88
8.1 2-零点, 2-セパレータの基本構造で起こる磁気リコネクション	88
8.1.1 3次元リコネクションの磁場トポロジー	88
8.1.2 Dungey のリコネクション	89
8.1.3 IMF とローブ磁場のリコネクション	92
8.1.4 ローブ磁場と閉磁場のリコネクション	94
8.1.5 まとめ	96

8.2 磁束循環と電離圏対流セル.....	97
第 2 部の引用文献	107
著者略歴	111

第 1 部 大規模電流系を駆動する磁気圏ダイナモ

「ダイナモ」と聞くと、日常生活では発電機を思い浮かべる人が多いだろう。地球科学者であれば、地球内部のダイナモや太陽内部のダイナモを思い浮かべる人もいると思う。様相はかなり異なるが、これらは全て同じ背景の思想で使われている。すなわちダイナモとは、力学的エネルギーから電磁エネルギーを生み出すものである。発電機は電気エネルギーを生み出す機械であり、地球内部や太陽内部のダイナモは磁場（のエネルギー）を生み出す機構のことである。後者のような大規模現象では、磁場と電流は等価に扱える。したがって磁場を生み出す機構は電流を生み出す機構でもある。地球磁気圏では大規模電流系が大規模対流系とともに形成されている。その大規模電流系をエネルギー的に維持する機構が磁気圏ダイナモである。第 1 部では磁気圏ダイナモの理論面を解説する。その基本となるのが磁気流体力学 (MHD) で、第 1 章をその簡単な紹介に当てている。ただし完全な記述は望むべくもなく、筆者の経験に基づく漫筆であることをご了承ください。ダイナモと沿磁力線電流は大規模電流系を構成する重要な要素である。第 2 章では、両者の関係を述べるとともに、沿磁力線電流の生成に関し古く (1970 年代) から行われている定式化を紹介する。第 3 章はダイナモ理論の本体で、2 種類の MHD スローモード擾乱がダイナモを構成することを示す。最後の第 4 章では、ダイナモと沿磁力線電流生成源の結合について定式化を試みる。

1 章 磁気流体力学 (MHD) : 大規模現象を記述する基本ツール

1.1 ガリレイ電磁気学

本書では非相対論的磁気流体を扱う。座標間の関係はガリレイ変換で与えられる。4 元座標 (ct, \mathbf{x}) のガリレイ変換は、相対速度 \mathbf{V} で動く座標系の物理量を prime (') で表すと

$$\begin{cases} ct' = ct \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t \end{cases} \quad (1.1a)$$

$$(1.1b)$$

で与えられる。ガリレイ変換を導入するとマクスウェル方程式は不変でなくなる。マクスウェル方程式のような物理法則は座標系に依らない形でなければならないのだが、これをどう解決すべきかは通常の教科書には全く書かれていない。本書の主旨から少しずれるかもしれないが、MHD の方程式系を紹介する前にガリレイ電磁気学 (例えば Le Bellac & Lévy-Leblond, 1973) についてまとめておく。一般に、物理量はその値が座標系に依存するものとそうでないものがある。ガリレイ変換で値が変化しない物理量をガリレイ不変量という。何がガリレイ不変で、何がガリレイ不変でないかを意識することは MHD の解析において重要である。本書では全章において電流、磁場、プラズマの流れを中心に議論する。電流と磁場はガリレイ不変であり、これらの解析に際しては座標系依存性を考える必要がない。一方、力学量の主役であるプラズマの流れは座標系に依存する。だがプラズマの流れはエネルギー変換において重要な役割を果たす。エネルギーに関する量は、一般には座標系に依存する。しかしエネルギー保存則はどの座標系でも同じ形で書け、電磁エネルギー密度 (磁場で表される) と熱エネルギー密度 (ガス圧で表される) はガリレイ不変である (1.2 節)。プラズマの流れは 2 つのエネルギー形態を取り持つ役割を担っている (3 章)。

1.1.1 ローレンツ変換とマクスウェル方程式

ローレンツ変換にもとづく (近似のない通常の) 電磁気学をローレンツ電磁気学と呼ぼう。表 1.1 の 2 列目にローレンツ電磁気学の方程式をまとめてある。電場を \mathbf{E} 、磁場を \mathbf{B} 、電荷密度を ρ_c 、電流密度を \mathbf{j} とし、電磁場はマクスウェル方程式 (T1.11) により記述される。同時に電磁場はスカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いて (T1.12) のように表される。(T1.11b) の発散をとれば、電荷の保存則 (T1.13) を得る。またプラズマに働くローレンツ力 \mathbf{F} の表式 (T1.14) は座標系に依らない形でないといけない。

マクスウェル方程式のような物理法則は、どの慣性座標系であっても同じでなければならない。古典力学に現れるガリレイ変換 (1.1) ではマクスウェル方程式を不変に保つことはできない。この矛盾を解消するためには、4 元座標 (ct, \mathbf{x}) に対してローレンツ変換

$$\begin{cases} ct' = \Gamma \left(ct - \frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \mathbf{x} \right) \end{cases} \quad (1.2a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \Gamma \left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{V}}{c} ct \right) + (1 - \Gamma) \mathbf{x}_\perp \end{cases} \quad (1.2b)$$

を導入する必要がある。ここで $\Gamma \equiv (1 - V^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ はローレンツ因子である。また \mathbf{x}_\perp は \mathbf{x} の \mathbf{V} に垂直な成分である。以下本節では添字 \parallel, \perp を相対速度 \mathbf{V} に平行, 垂直という意味で用いる (磁場 \mathbf{B} に対して平行, 垂直という意味ではない)。ローレンツ変換によって電磁場 $(\mathbf{E}, c\mathbf{B})$, 4 元電流密度 $(c\rho_c, \mathbf{j})$, 4 元電磁ポテンシャル $(\varphi/c, \mathbf{A})$ は, それぞれ表 1.1 の (T1.1), (T1.2), (T1.3) のように変換される。電氣的量 $\mathbf{E}, \rho_c, \varphi$ と磁氣的量 $\mathbf{B}, \mathbf{j}, \mathbf{A}$ に微妙な対称性 (非対称性とも言える) があることがわかる。変換 (T1.1), (T1.2), (T1.3) によって, 電磁場の基本法則・基本方程式 (T1.4), (T1.5), (T1.6), (T1.7) はどの座標系でも同じに形になる。ローレンツ変換において, (1.2) と同様に変換されるベクトルを (反変) 4 元ベクトルという。前出の 4 元電流密度 $(c\rho_c, \mathbf{j})$ と 4 元電磁ポテンシャル $(\varphi/c, \mathbf{A})$ は 4 元ベクトルである (T1.2) と (T1.3) を参照)。 $(\mathbf{E}, c\mathbf{B})$ は 4 元ベクトルではないが, 類似の変換を受ける (T1.1 参照)。以下 $(\mathbf{E}, c\mathbf{B})$ も 4 元ベクトルと同列に扱う。変数対 $(\mathbf{E}, c\mathbf{B})$, $(\varphi/c, \mathbf{A})$ において, c は電氣的量と磁氣的量の単位を換算する定数であって, 光速という意味を持たない。国際単位系では, この換算定数が光速となるように定めている。単位系が変われば当然この換算定数も変わる。一方, $(c\rho_c, \mathbf{j})$ の c は (ct, \mathbf{x}) の c と同じで, 光速という意味を持っている。電荷はローレンツ不変であり, 電荷密度や電流密度が変化するのは, 変換 (1.2) で長さが変わるためである。ところが, 電荷と電流はそれぞれ電場と磁場の源であるから, $c\rho_c$ は電氣的量, \mathbf{j} は磁氣的量と考えることができる。変数対 $(c\rho_c, \mathbf{j})$ におけるこの二面性は, 少しやっかないなことを引き起こす (1.1.3 節)。

表 1.1 ローレンツ電磁気学とガリレイ電磁気学の比較

	ローレンツ電磁気学	ガリレイ電磁気学	
		電氣的極限	磁氣的極限
電磁場	$\begin{cases} \mathbf{E}' = \Gamma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times c\mathbf{B} \right) + (1-\Gamma) \mathbf{E}_{\parallel} \\ c\mathbf{B}' = \Gamma \left(c\mathbf{B} - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E} \right) + (1-\Gamma) c\mathbf{B}_{\parallel} \end{cases}$ <p>(T1.1a, b)</p>	$\begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} \\ c\mathbf{B}' = c\mathbf{B} - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E} \end{cases}$ <p>(T1.8a, b)</p>	$\begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times c\mathbf{B} \\ c\mathbf{B}' = c\mathbf{B} \end{cases}$ <p>(T1.15a, b)</p>
四元電流密度	$\begin{cases} c\rho'_c = \Gamma \left(c\rho_c - \frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \mathbf{j} \right) \\ \mathbf{j}' = \Gamma \left(\mathbf{j} - \frac{\mathbf{V}}{c} c\rho_c \right) + (1-\Gamma) \mathbf{j}_{\perp} \end{cases}$ <p>(T1.2a, b)</p>	$\begin{cases} c\rho'_c = c\rho_c \\ \mathbf{j}' = \mathbf{j} - c\rho_c \frac{\mathbf{V}}{c} \end{cases}$ <p>(T1.9a, b)</p>	$\begin{cases} c\rho'_c = c\rho_c - \frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{j}' = \mathbf{j} \end{cases}$ <p>(T1.16a, b)</p>
四元ポテンシャル	$\begin{cases} \frac{\phi'}{c} = \Gamma \left(\frac{\phi}{c} - \frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \mathbf{A} \right) \\ \mathbf{A}' = \Gamma \left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{V}}{c} \frac{\phi}{c} \right) + (1-\Gamma) \mathbf{A}_{\perp} \end{cases}$ <p>(T1.3a, b)</p>	$\begin{cases} \frac{\phi'}{c} = \frac{\phi}{c} \\ \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{V}}{c} \frac{\phi}{c} \end{cases}$ <p>(T1.10a, b)</p>	$\begin{cases} \frac{\phi'}{c} = \frac{\phi}{c} - \frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' = \mathbf{A} \end{cases}$ <p>(T1.17a, b)</p>
マクスウェル方程式	$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$ <p>(T1.4a-d)</p>	$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$ <p>(T1.11a-d)</p>	$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$ <p>(T1.18a-d)</p>
ポによる表現	$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases}$ <p>(T1.5a, b)</p>	$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla \phi \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases}$ <p>(T1.12a, b)</p>	$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases}$ <p>(T1.19a, b)</p>
電荷	$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ <p>(T1.6)</p>	$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ <p>(T1.13)</p>	$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ <p>(T1.20)</p>
ロカ	$\mathbf{F} = \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ <p>(T1.7)</p>	$\mathbf{F} = \rho_c \mathbf{E}$ <p>(T1.14)</p>	$\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ <p>(T1.21)</p>

(注) 表側の「ポによる表現」, 「電荷」, 「ロカ」は, それぞれ「ポテンシャルによる電磁場の表現」, 「電荷保存則」, 「ローレンツ力」を表している。

1.1.2 ガリレイ変換とマクスウェル方程式

ガリレイ変換にもとづく(近似された)電磁気学をガリレイ電磁気学とよぼう。ガリレイ変換(1.1)はローレンツ変換(1.2)において $V \ll c$ の極限だけでは得られない。今単純に(1.2)で $V \ll c$ の極限を考えると, $\Gamma = 1$ において

$$\begin{cases} ct' = ct - \frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{V}}{c} ct \end{cases} \quad (1.3a)$$

$$\quad (1.3b)$$

を得る。形式的には V/c の 1 次項までとった形になっている。(1.3a)の右辺第 2 項は一般には省略できない。これが省略できるのは $ct \gg |\mathbf{x}|$ の場合である。すなわち, 4 元ベクトル (ct, \mathbf{x}) の時間部分が空間部分に比べてずっと大きい場合である。これを超時間的 (ultra-timelike) と呼ぶ。この逆の場合, すなわち $ct \ll |\mathbf{x}|$ を超空間的 (ultra-spacelike) と呼ぶ。ガリレイ変換(1.1)はローレンツ変換(1.2)で $V \ll c$ かつ超時間的極限 $ct \gg |\mathbf{x}|$ として得られる。 V/c と $|\mathbf{x}|/ct$ がともに 1 次の微小量とすれば, ガリレイ変換(1.1)には微小量の 1 次項がなく, 2 次の微小量を見捨てる近似になっている。一方, (1.3)で超空間的極限 $ct \ll |\mathbf{x}|$ も理論上は考えられる。すなわち

$$\begin{cases} ct' = ct - \frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} \end{cases} \quad (1.4a)$$

$$\quad (1.4b)$$

となる。これはキャロル変換という名前がついているようだが, このような運動は非現実的である。4 元勾配 $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$ は共変ベクトルであるが, $\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$ と反変ベクトルで表現することもできる。反変 4 元勾配は 4 元ベクトルであり, その変換は

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} = \Gamma \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mathbf{V}}{c} \cdot (-\nabla) \right) \quad (1.5a)$$

$$-\nabla' = \Gamma \left((-\nabla) - \frac{\mathbf{V}}{c} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) + (1 - \Gamma)(-\nabla_\perp) \quad (1.5b)$$

とローレンツ変換(1.2)と同じ形になる。ただしガリレイ変換への移行は, 4 元座標との整合性を保つ

ためには, 超空間的極限 $\frac{1}{c} \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \ll |\nabla|$ をとる。すなわち(1.5)から

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \\ \nabla' = \nabla \end{cases} \quad (1.6a)$$

$$\quad (1.6b)$$

となる。もちろん, (1.6)は(1.1)から導くこともできる。

ガリレイ変換のもとではマクスウェル方程式を不変に保つことはできないのだが、本来物理法則はどの座標系でも同じであるべきである。マクスウェル方程式をガリレイ変換と首尾一貫した形に近似できるのは、微小量の 1 次項がなく、2 次の微小量を無視する場合である。これを行うには、座標変換で行った近似と同様に、 $V \ll c$ の極限と同時に、4 元ベクトルで超時間的極限または超空間的極限を考えればよい。実際変換則(T1.1), (T1.2), (T1.3)をみると、 E と cB , $c|\rho_c|$ と j , $|\phi|/c$ と A , それぞれの比が 1 次の微小量である場合に限り、微小量の 1 次項がなくなり、首尾一貫して 2 次の微小量を省略できる。 ρ_c は電場に関するガウスの法則から E で見積もれ、 j はアンペールの法則から B で見積もれることを考慮すると、「(A): $E \gg cB$, $c|\rho_c| \gg j$, $|\phi|/c \gg A$ 」は全て同じ仮定である。同様に「(B): $E \ll cB$, $c|\rho_c| \ll j$, $|\phi|/c \ll A$ 」は全て同じ仮定である。前者(A)は電氣的な量が支配的な場合で、変数対 $(\mathbf{E}, c\mathbf{B})$, $(c\rho_c, \mathbf{j})$, $(\phi/c, A)$ の超時間的極限に対応する。これを電氣的極限と呼ぶ。後者(B)は磁氣的な量が支配的な場合で、変数対 $(\mathbf{E}, c\mathbf{B})$, $(c\rho_c, \mathbf{j})$, $(\phi/c, A)$ の超空間的極限に対応する。これを磁氣的極限と呼ぶ。この 2 つの極限では、近似されたマクスウェル方程式がガリレイ変換に対して不変になる(すなわちどの座標系でも同じ形になる)。また $V \ll c$ の条件下で、ガリレイ変換と首尾一貫した形でマクスウェル方程式が書けるのは、この 2 つの場合に限られる。以下この 2 つの場合を考察する。

(A) 電氣的極限 (electric limit) : $V \ll c$ かつ $E \gg cB$

これは電場が磁場よりずっと大きい場合で、具体的状況としては、孤立した電荷がゆっくり運動しているような場合である。宇宙空間のプラズマは電荷が準中性なので、このような状況にはなり得ないが、磁氣的極限と比較するため考察してみる。 $V \ll c$ かつ $E \gg cB$ の極限を変換式(T1.1), (T1.2), (T1.3)に適用すると、それぞれ表 1.1 の(T1.8), (T1.9), (T1.10)となる。また基本法則・基本方程式(T1.4), (T1.5), (T1.6), (T1.7)に電氣的極限を適用すると、それぞれ表 1.2 の(T1.11), (T1.12), (T1.13), (T1.14)となる。ガリレイ変換に対して、物理量の変換は(T1.8), (T1.9), (T1.10)で与えられ、このとき物理法則(T1.11), (T1.12), (T1.13), (T1.14)はどの座標系でも同じ形になる。電氣的極限では \mathbf{E} , ρ_c , ϕ が変換の不変量になる(どの座標系でも同じ値)。磁場の時間変化は電場に影響しない。したがってファラデーの法則(T1.11a)で磁場の時間変化の項は現れない。(T1.14)より、ローレンツ力はアンペール力が消えて電場の力だけとなる。

(B) 磁氣的極限 (magnetic limit) : $V \ll c$ かつ $E \ll cB$

宇宙空間プラズマは電荷の準中性が満たされているので、電場は磁場に比べてずっと小さい。したがって宇宙空間現象には、基本的には磁氣的極限が適用される。本書で扱う MHD もこの極限を前提とする。ただし一部修正が必要である(1.1.3 節)。磁氣的極限が適用される流体力学が磁気流体力学 (magnetohydrodynamics, MHD) で、電氣的極限が適用される流体力学が電気流体

力学 (electrohydrodynamics, EHD) である。日本語では MHD を電磁流体力学とも言うが、本来の意味が失われている。 $V \ll c$ かつ $E \ll cB$ の極限を (T1.1), (T1.2), (T1.3) に適用すると、それぞれ表 1.1 の (T1.15), (T1.16), (T1.17) となる。また基本法則・基本方程式 (T1.4), (T1.5), (T1.6), (T1.7) に磁氣的極限を適用すると、それぞれ表 1.1 の (T1.18), (T1.19), (T1.20), (T1.21) となる。ガリレイ変換に対して、物理量の変換は (T1.15), (T1.16), (T1.17) で与えられ、このとき物理法則 (T1.18), (T1.19), (T1.20), (T1.21) はどの座標系でも同じ形になる。磁氣的極限では \mathbf{B} , \mathbf{j} , \mathbf{A} が変換の不変量になる (どの座標系でも同じ値)。電場の時間変化は磁場に影響しない。したがってアンペール・マクスウェルの法則 (T1.18b) で電場の時間変化の項 (いわゆる変位電流) は現れない。変位電流項がないことにより、電荷の保存則 (T1.6) は (T1.20) となる。(T1.20) は、磁氣的極限では \mathbf{j} は電荷の輸送に関与することが出来ず、またある空間領域に電荷が蓄積することがないことを示している。(T1.21) より、ローレンツ力は電場の力が消えてアンペール力だけとなる。

(T1.16a) によると、座標変換により局所的には電荷密度が $\Delta\rho_c = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{j}/c^2$ だけ変化する。しかし全電荷の変化はない。すなわち、 $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0$ の関係を用いて全電荷の変化 ΔQ を計算すると

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \int_V \Delta\rho_c dV \\ &= -\frac{1}{c^2} \int_V \mathbf{V} \cdot \mathbf{j} dV \\ &= -\varepsilon_0 \int_V \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV \\ &= \varepsilon_0 \mathbf{V} \cdot \oint_S \mathbf{B} \times d\mathbf{S} \\ &= 0\end{aligned}\tag{1.7}$$

となる。体積積分 V は全空間、面積分 S は無限遠で行う。体積積分から面積分への変形はガウスの外積定理

$$\int_V dV (\nabla \times \mathbf{A}) = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}\tag{1.8}$$

を用いている。ここで \mathbf{A} は任意のベクトル場である。また (1.7) の最後で面積分が 0 となる理由は、以下のように考えればよい。有限領域にある電流は必ずループ電流の集まりである。ループ電流が作る磁場は双極子磁場である。双極子磁場の大きさは $B \sim r^{-3}$ で減少するのに対し、面積は $S \sim r^2$ で増加する。したがって $r \rightarrow \infty$ のとき $BS \sim r^{-1} \rightarrow 0$ となる。

表 1.2 に力学的物理量も含めてガリレイ不変量をまとめてある。プラズマ速度 \mathbf{v} は当然座標系に依存するが、粒子間・流体間の相対速度は座標系に依存せずガリレイ不変量となる。粒子の衝突は粒子間の相対速度に依存する。したがって粒子の衝突に起因する巨視的物理量、例えばプラズマのガス圧 (p)、衝突周波数 (ν)、電気抵抗率 (η)、電気伝導率 (σ)、温度 (T)、熱フラックス (\mathbf{q}) などはガリレイ不変となる。電磁場については、 E と cB の大小関係がローレンツ不変であること、内積 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ がローレンツ不変であること、を特筆したい。したがって座標変換によって系が電気

的であるか ($E > cB$) 磁氣的であるか ($E < cB$) が入れ替わることはない. また電氣的極限では沿電氣力線磁場が, 磁氣的極限では沿磁力線電場がそれぞれガリレイ不変となる. 磁氣的極限の仮定のもと, 第 8 章で 3 次元リコネクションのトポロジーを議論する. リコネクション効率は沿磁力線電場で与えられるのでガリレイ不変である. リコネクション効率は座標系に依存しない本質的な物理量と考えられる.

表 1.2 ガリレイ不変量

	共通	電氣的極限	磁氣的極限
ガリレイ不変量	ρ : 質量密度 n : 数密度 p : ガス圧 ν : 衝突周波数 η : 電氣抵抗率 σ : 電氣伝導率 T : 温度 \mathbf{q} : 熱フラックス	\mathbf{E} : 電場 ρ_c : 電荷密度 ϕ : スカラーポテンシャル $\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{E}$: 沿電氣力線磁場 (*)	\mathbf{B} : 磁場 \mathbf{j} : 電流密度 \mathbf{A} : ベクトルポテンシャル $\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{B}$: 沿磁力線電場 (*)
座標系に依存する量	\mathbf{v} : プラズマ速度	\mathbf{B} : 磁場 \mathbf{j} : 電流密度 \mathbf{A} : ベクトルポテンシャル	\mathbf{E} : 電場 ρ_c : 電荷密度 ϕ : スカラーポテンシャル

(*) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ はローレンツ不変である.

1.1.3 ガリレイ相対論との整合

磁氣的極限を採用すると, ローレンツ変換にともなう $(c\rho_c, \mathbf{j})$ の変換は (T1.16) で与えられる. これはガリレイ相対論と矛盾する. ガリレイ変換では, 変数対 (ct, \mathbf{x}) において $ct \gg |\mathbf{x}|$ (超時間的極限) を仮定する. 変数対 $(c\rho_c, \mathbf{j})$ の c も (ct, \mathbf{x}) の c と同じ意味を持つから (1.1 節), ガリレイ相対論では $(c\rho_c, \mathbf{j})$ に超時間的極限 $c\rho_c \gg j$ を適用して

$$\begin{cases} \rho'_c = \rho_c & (1.9a) \\ \mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho_c \mathbf{V} & (1.9b) \end{cases}$$

となる. これは (T1.9) と同じ形をしているが, 電氣的極限を採用したという意味ではない. このように, 磁氣的極限とガリレイ相対論は相容れない面がある. ところで MHD に関する多くの文献では, (T1.16) ではなく (1.9) を採用している. この意味を考えてみよう. 磁氣的極限では $c\rho_c \ll j$ を仮定するが, 宇宙空間プラズマではこの条件は必ずしも満たされていないようである. 一方 $E \ll cB$ は常

に満たされている. すなわち宇宙空間プラズマは完全な磁氣的極限ではないことになる. ローレンツ変換にともなう $(c\rho_c, \mathbf{j})$ の変換を V/c の 1 次までとると

$$\begin{cases} c\rho'_c = c\rho_c - \frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{j}' = \mathbf{j} - c\rho_c \frac{\mathbf{V}}{c} \end{cases} \quad (1.10a)$$

$$\quad (1.10b)$$

となる. (1.10a) の右辺第 2 項はいわゆる「ローレンツ収縮」の効果を表している. 磁氣的極限 $c\rho_c \ll j$ では $V \ll c$ であってもローレンツ収縮による電荷密度の変化を一般には無視できないのだが, もし $c\rho_c$ と j のオーダーが著しく違わなければ, (1.10a) を (1.9a) と近似することが許される. この場合, (1.10b) の右辺第 2 項を省略して, 磁氣的極限の変換式 (T1.16b) と同じ形を用いることも許される. これが, ローレンツ変換の近似 (T1.15) とガリレイ変換の帰結 (1.9) を組み合わせた

$$\begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} \\ \rho'_c = \rho_c \\ \mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho_c \mathbf{V} \end{cases} \quad (1.11a)$$

$$\quad (1.11b)$$

$$\quad (1.11c)$$

$$\quad (1.11d)$$

が多くの文献で用いられている理由であると思われる. \mathbf{j} の変換には磁氣的極限の形を残して

$$\begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} \\ \rho'_c = \rho_c \\ \mathbf{j}' = \mathbf{j} \end{cases} \quad (1.12a)$$

$$\quad (1.12b)$$

$$\quad (1.12c)$$

$$\quad (1.12d)$$

でもよい. MHD は磁氣的極限を採用し, ρ_c の変換は本来 (T1.16a) の形になるはずだが, (1.11c) でも特に問題は起こらない. MHD の方程式系には ρ_c が陽に出てこないからである. そして, 宇宙空間プラズマは完全な磁氣的極限にはないが, 大規模現象に関しては MHD で十分表現できる.

変換 (1.11) のご利益がもうひとつある. 変換 (1.11) では, 電場による力も含めたローレンツ力 $\mathbf{F} = \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ が不変になる. 力の不変性はガリレイ相対論の要請である. ガリレイ変換では加速度が座標系に依存しないから, ニュートンの運動方程式から力も座標系に依らない量になる. ちなみに, ローレンツ変換で力は不変ではない. (1.11) はガリレイ変換の帰結 (たまたま電氣的極限と一致) と磁氣的極限の混成なので, $\mathbf{F} = \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ が不変になるのは必然ではないが驚くことでもない. そして混成形にした代償として, 当然 (1.11) では (そして (1.12) でも) マクスウェル方程式を不変に保てない.

1.1.4 ガリレイ不変のすすめ

物理過程は, ガリレイ不変な物理量や方程式を用いて, 座標系に依らない形で議論するのが王

道である。磁気流体力学 (MHD) ではその名の通り磁氣的極限を採用し、磁場と電流が不変量となる。電磁気学量の議論は磁場と電流が中心になり、電場や電荷密度は表に出てこない。一方座標系に依存する量、特に電場を議論する場合には注意が必要である。

例えば電離圏の電気力学で、 $\rho_c = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$ を基に「電荷の蓄積 (分極電荷) により電場 (分極電場) が発生する」という言い方をよくするが、因果関係の説明としては疑問である。座標変換により電場が消える座標系に移ることができるが、電荷密度は消えない。(1.11c) に従えば新しい座標系でも同じ電荷密度が存在する。この状況では「電荷が電場を作る」という因果関係は到底言えない。そもそも磁氣的極限では $\frac{\partial \rho_c}{\partial t} = 0$ であり、電荷は蓄積しない。このように伝統的な考えの中にも、ガリレイ電磁気学の観点からは不適切なものがある。それでは MHD ではどう考えるべきか。MHD では電場はプラズマ運動の結果と解釈する。すなわち $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ を \mathbf{v} が原因で \mathbf{E} がその結果だと解釈する。右辺の \mathbf{v} は座標系に依るが、方程式の形は座標系に依らない ($\mathbf{E}' = -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$)。 \mathbf{E} と \mathbf{v} の因果関係については次節 1.2 でさらに説明する。一方、プラズマの運動 \mathbf{v} はニュートンの運動方程式で決まる。したがってプラズマに働く力 (電離圏ではアンペール力と中性粒子との衝突による力) を考察することが本質的である。

別の例を考えてみよう。同じく電離圏の電気力学で、中性粒子の重心系では“オームの法則”が $\mathbf{j} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{E}_*$ ($\mathbf{E}_* \equiv \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$, \mathbf{u} は中性風速度) と書けるので、「電場が電離圏電流を駆動する」という言い方をよくする。あるいは $\mathbf{E}_n \equiv \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ を「ダイナモ電場」と呼び、「ダイナモ電場が電流駆動に寄与する」という言い方もよく耳にする。しかしこれらの言い方も疑問である。“オームの法則”が $\mathbf{j} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{E}$ の形になる座標系は他にも存在する。本来のオームの法則は、プラズマ (イオンと電子) の重心速度 \mathbf{v} で動く座標系でみた電流と電場の関係で、 $\mathbf{j} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{E}$ の形になる (Song et al., 2001)。だが一般には ζ を任意の定数として、相対速度

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \zeta (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (1.13)$$

で動く座標系に移れば (\mathbf{u} は中性粒子の重心速度, \mathbf{v} はプラズマの重心速度), この座標系での電場 $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}$ に対して係数 $\underline{\underline{\sigma'}}$ が存在し $\mathbf{j} = \underline{\underline{\sigma'}} \cdot \mathbf{E}'$ の形になる (Vasyliunas & Song, 2005)。電場は座標系に依存する量であり、係数 $\underline{\underline{\sigma'}}$ は座標系によって形が変わる。前述のように $\underline{\underline{\sigma'}}$ が (電子とイオンの衝突に起因する) 本来の電気伝導度を表すのは $\mathbf{V} = \mathbf{v}$ の場合である。一方、電場が消える系でも電流は存在し、「電場が電流を駆動する」とは到底言えない。それでは MHD ではどう解釈すべきか。MHD では電流は磁場変動の結果と解釈する。すなわち $\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \Delta \mathbf{B}$ を $\Delta \mathbf{B}$ が原因で \mathbf{j} がその結果だと解釈する。この因果関係については次節 1.2 でさらに説明する。磁場変動

$\Delta \mathbf{B}$ はファラデーの法則 $\frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ で決まる。そしてプラズマの運動 \mathbf{v} はニュートンの運動方程式で決まる。中性風がダイナモになる場合は $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -v_{in} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{u})$ である (v_{in} はイオンと中性粒子の衝突周波数, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ はラグランジェ微分)。以上の因果関係を表す 3 方程式は全て座標系に依らない。また、ファラデーの法則を $\frac{d}{dt} \Delta \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{v})$ の形に書いておけば、全 3 方程式において、右辺の量 (原因), 左辺の量 (結果) とともにガリレイ不変である。因果関係をまとめると、 $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v} \rightarrow \Delta \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{j}$ となる。

以上の 2 例から予想されるように、MHD では物事の原因はプラズマの流れ \mathbf{v} と考えてよい。 \mathbf{v} をどのようにして作るかが決定的に重要で、それを記述するのがニュートンの運動方程式である。本書の議論でも \mathbf{v} の考察が大きな割合を占める。

1.2 MHD 擾乱の固有モード

理想 MHD の方程式系について、固有モードを中心にまとめておく。3 章では、MHD 擾乱を固有モードに分解して考察する。理想 MHD は 8 変数の方程式系をなす。その 8 変数とは

ρ : プラズマの質量密度

\mathbf{v} : プラズマの速度

p : プラズマの気体圧力

\mathbf{B} : 磁場 (磁束密度)

である。このうち、 \mathbf{v} 以外はガリレイ不変量である。これら 8 変数は以下の時間発展方程式を満たす。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho - \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \end{array} \right. \quad (1.14a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho \mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \end{array} \right. \quad (1.14b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) p - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} \end{array} \right. \quad (1.14c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{array} \right. \quad (1.14d)$$

ここで μ_0 は真空の透磁率, γ は比熱比である。(1.14) は 8 個の方程式から成るので、つじつまが合っている。また右辺は全て現在の量およびその空間微分である (時間 t を陽に含まない)。すなわち、未来の量が現在の量で決定されることを示す。ここで現在の量について

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.15)$$

の制約が加わる。これは未来の量の制約でもある。実際, (1.14d) から, ある時刻で (1.15) が満たされれば, 未来永劫 (1.15) が満たされる。 (1.15) の制約があるため, 実質的に変数が 1 つ減る。理想 MHD は 7 変数の時間発展方程式系であると言える。したがって理想 MHD 方程式系には固有モードが 7 つある。すなわち, ①+方向と-方向に伝播するスローモード (2 個), ②+方向と-方向に伝播するアルヴェンモード (2 個), ③+方向と-方向に伝播するファーストモード (2 個), ④変動・伝播しないエントロピーモード (1 個)。任意の擾乱は 7 個の固有モードの線形結合で表される。

理想 MHD では上述の基本 8 変数に加えて

\mathbf{j} : 電流密度

\mathbf{E} : 電場 (電場強度)

ρ_c : 電荷密度

が副次的に導入される。すなわち, (1.14) を解いて基本 8 変数が求まれば, 副変数は

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \end{array} \right. \quad (1.16a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \end{array} \right. \quad (1.16b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_c = -\varepsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{array} \right. \quad (1.16c)$$

から求まる。ここで ε_0 は真空の誘電率である。MHD の時間・空間スケールでは $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, $\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$ の

項は無視されていて, 時間発展を表す方程式がない。 $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$ は一般化されたオームの法則 (ここでは

示していない) に現れる。MHD のスケールでは $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$ を省略し, さらにいくつかの項が省略されて

(1.16a) となる。 $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ は (T1.4b) の右辺第 2 項に現れる。磁氣的極限では $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ を無視して (T1.18b) すな

わち (1.16b) と近似される。 $\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$ は (T1.6) の左辺第 1 項に現れる。磁氣的極限では $\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$ を無視して

(T1.20) と近似される。 (1.16c) は (T1.4c) または (T1.18c) に (1.16a) を代入して得られる。このように,

MHD では \mathbf{E} , \mathbf{j} , ρ_c は (1.16) から間接的に求まる量である。実際, (1.16) の右辺を原因, 左辺をそ

の結果と考えることは理にかなっている。Vasyliunas (2001) は, $C_A \ll c$ の条件下において (C_A はア

ルヴェン速度, c は光速で, 非相対論的 MHD でこの条件は満たされている), 階段関数的に \mathbf{v} を

変化させると (1.16a) で関係づけられる \mathbf{E} の変化を生むが, 逆に \mathbf{E} を階段関数的に変化させても \mathbf{v}

は変化しないことを示した。前者の場合, \mathbf{E} の変化は ω_p^{-1} の時間スケールで起こる (ω_p はプラズマ

角振動数)。 ρ_c の時間変化は \mathbf{E} の時間変化と等価であるから ((1.16a) の空間微分が (1.16c) であ

る), ρ_c と \mathbf{v} にも同様な関係がある。 \mathbf{v} が階段関数的に変化すると ρ_c は ω_p^{-1} の時間スケールで

(1.16c)を満たすように変化する. 逆に ρ_c が階段関数的に変化しても \mathbf{v} は変化しない. 一方 Vasyliunas (2005)は, $\lambda_e \ll L$ の条件下において ($\lambda_e \equiv \frac{c}{\omega_p}$ は電子慣性長, L は空間スケールで, MHD でこの条件は満たされている), 階段関数的に \mathbf{B} を変化させると(1.16b)で関係づけられる \mathbf{j} の変化を生むが, 逆に \mathbf{j} を階段関数的に変化させても \mathbf{B} は変化しないことを示した. 前者の場合, \mathbf{j} の変化は \mathbf{E} 同様 ω_p^{-1} の時間スケールで起こる. MHD は ω_p^{-1} よりずっと長い時間スケールを扱うので, 以上の因果関係を MHD では議論することができない. しかしその背景を知っておくことは重要である. このように MHD では \mathbf{v} と \mathbf{B} が主役であって, \mathbf{E} , \mathbf{j} , ρ_c は脇役である. しかしここで注意しておきたいことは, 変数が副次的と言っても, それは物理的に重要でないことを意味しない. 特にガリレイ不変量である \mathbf{j} は重要な物理量で, 今後もたびたび登場する.

1.3 エネルギー保存則

本書ではダイナモすなわち電磁エネルギーの源を扱うので, 議論の出発点はエネルギー方程式である. 表 1.3 にエネルギー方程式に現れる物理量を定義してある. エネルギー変換率には σ という記号を用いている. 以前に出てきた電気伝導率と同じ記号であるが, 別のものである (紛れはないと思うのでご容赦願いたい). 理想 MHD ではエネルギー散逸はなく, 全エネルギーが保存される.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k + \varepsilon_p + \varepsilon_m) + \nabla \cdot (\mathbf{S}_k + \mathbf{S}_p + \mathbf{S}_m) = 0 \quad (1.17)$$

当然(1.17)は(1.14)と独立なものではなく, (1.14)から導くことができる. MHD におけるエネルギーは ①流れの運動エネルギー, ②プラズマの熱エネルギー, ③電磁エネルギー, の 3 形態がある. (1.17)式は全エネルギーの和であるが, 3 形態それぞれのエネルギー方程式に分解することができる (例えば Birn and Hesse, 2005).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_k + \nabla \cdot \mathbf{S}_k = \sigma_k \end{array} \right. \quad (1.18a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_p + \nabla \cdot \mathbf{S}_p = \sigma_p \end{array} \right. \quad (1.18b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_m + \nabla \cdot \mathbf{S}_m = \sigma_m \end{array} \right. \quad (1.18c)$$

電磁エネルギー保存則(1.18c)は, 力学的エネルギー (流れの運動エネルギーと熱エネルギーの総和) の保存則とは独立で, ポインティングの法則 (Poynting, 1884) とよばれている. また, \mathbf{S}_m にはポインティングフラックスという名前がついている. 一方, (1.18a)は(1.14a)を用いれば恒等的に成立する. また(1.18b)は, (1.14a)を用いれば(1.14c)と等価であることがわかる. したがって, 力学的エネルギー

ギー保存則を(1.18a)と(1.18b)に分解することは、ある意味形式的と言える。(1.18)式の右辺は各エネルギーの変換率(生成消滅率)を表す。表 1.3 にあるように、エネルギー変換率 σ は、磁力線に沿う力によるもの(縦成分と呼ぼう)と磁力線に垂直な力によるもの(横成分と呼ぼう)に分けることができる。電磁エネルギーは横成分のみで、理想 MHD では

$$\sigma_m + \sigma_{k\perp} + \sigma_{p\perp} = 0 \quad (1.19)$$

が成立する。本書で議論するダイナモは電磁エネルギーが生成される($\sigma_m > 0$)過程である。これに対し電磁エネルギーが消滅する($\sigma_m < 0$)過程をロードと呼ぶことにする。また、本書では議論しないが、縦成分については

$$\sigma_{k\parallel} + \sigma_{p\parallel} = 0 \quad (1.20)$$

の関係がある。「縦成分」「横成分」という言い方をするが、ベクトルの成分とは異なる。エネルギー保存則(1.18a)や(1.18b)が2つの成分に分解されるわけではない。

表 1.3 理想 MHD エネルギー方程式における物理量の定義

エネルギー形態	エネルギー密度 ε	エネルギー(エントルピー)フラックス \mathbf{S}	力 \mathbf{F}	エネルギー変換(生成消滅)率 $\sigma = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$	エネルギー変換率の縦・横分解
電磁エネルギー	$\varepsilon_m \equiv \frac{B^2}{2\mu_0}$	$\mathbf{S}_m \equiv \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}$ ポインティングフラックス	$\mathbf{F}_m \equiv \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ アンペール力	$\sigma_m \equiv -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$	$\begin{cases} \sigma_{m\parallel} = 0 \\ \sigma_{m\perp} = \sigma_m = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \end{cases}$
プラズマ熱エネルギー	$\varepsilon_p \equiv \frac{p}{\gamma - 1}$	$\mathbf{S}_p \equiv \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \mathbf{v}$	$\mathbf{F}_p \equiv -\nabla p$ 圧力勾配力	$\sigma_p \equiv (\mathbf{v} \cdot \nabla) p$	$\begin{cases} \sigma_{p\parallel} \equiv (\mathbf{v}_{\parallel} \cdot \nabla) p \\ \sigma_{p\perp} \equiv (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla) p \end{cases}$
流れの運動エネルギー	$\varepsilon_k \equiv \frac{\rho v^2}{2}$	$\mathbf{S}_k \equiv \frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v}$	$\mathbf{F}_k \equiv -\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 慣性力	$\sigma_k \equiv \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right)$	$\begin{cases} \sigma_{k\parallel} \equiv \rho \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{\parallel} \\ \sigma_{k\perp} \equiv \rho \mathbf{v}_{\perp} \cdot \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{\perp} \end{cases}$

一般にエネルギーに関する量は座標系に依存する。ただし物理量の定義(表 1.3)と物理法則であるエネルギー保存則[(1.17), (1.18), (1.19), (1.20)]はどの座標系でも同じ形である。また、3章で「磁気圏ダイナモは熱エネルギーを電磁エネルギーに変換する過程」であることを議論するが、電磁エネルギー密度(ε_m)と熱エネルギー密度(ε_p)はガリレイ不変である。力 \mathbf{F} もガリレイ不変

($\mathbf{F}' = \mathbf{F}$)である。なぜなら、ガリレイ変換では加速度が不変なので、運動方程式から力も不変となる。エネルギー保存則(1.18)のソース項 σ は、ガリレイ変換(1.1)で

$$\sigma'_i = \sigma_i + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}_i \quad (i = m, p, k) \quad (1.21)$$

のように変換される。(1.21)の右辺に現れる $\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}_i$ は、力 \mathbf{F}_i が単位時間にする仕事を表している。しかし、新たにエネルギーが生まれたり、消えたりしているわけではない。実際、prime 系における(1.18)の左辺は

$$\frac{\partial}{\partial t'} \varepsilon'_i + \nabla' \cdot \mathbf{S}'_i = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_i + \nabla \cdot \mathbf{S}_i + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}_i \quad (i = m, p, k) \quad (1.22)$$

と変形され、左辺にも同じ項が現れる。すなわち、 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}_i$ は座標系の相対運動 \mathbf{V} による見かけ上のエネルギーの流入・流出と解釈できる。また、(1.21), (1.22)の式変形は、エネルギー保存則が物理法則である(どの座標系でも同じ形になる)ことを再認識させてくれる。

2 章 沿磁力線電流源とダイナモ

2.1 沿磁力線電流源に内在するダイナモ

本書で言う「沿磁力線電流源」とは、磁力線に垂直な電流 \mathbf{j}_\perp （「垂直電流」と呼ぶ）から沿磁力線電流 \mathbf{j}_\parallel を作る機構、またはその機構が働いている領域のことである。言い換えると沿磁力線電流の発散（または収束） $\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel$ を作る機構またはその領域である。図 2.1 は沿磁力線電流系を極めて簡単化して図示したものである。図 2.2 の斜線を付けた領域が沿磁力線電流源である。沿磁力線電流源では垂直電流が沿磁力線電流に変換される。沿磁力線電流源はダイナモと密接に結びついている。すなわち、沿磁力線電流源内部の垂直電流部分（図 2.1 の “Alfvénic dynamo”）は $\sigma_m > 0$ である。 $\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel \neq 0$ であっても $\sigma_m < 0$ の領域は、通常、沿磁力線電流「源 (source)」とは言わない。そのような領域は沿磁力線電流の「シンク (sink)」と考えるべきである。沿磁力線電流はアルヴェンモードに特有であるから、沿磁力線電流源に内在するダイナモはアルヴェンモード擾乱が作るものである。ところで、沿磁力線電流源に内在するダイナモはエネルギー的には小さく、電流回路全体を維持するには甚だ不十分である。したがって大規模電流系には沿磁力線電流源とは別にもっと大きなダイナモがある（図 2.1 の “Main dynamo”）。「電流系のダイナモ」と言う場合、通常はこの主要なダイナモのことを指す。電流系のダイナモは電流系の電圧を維持する機構でもあるの

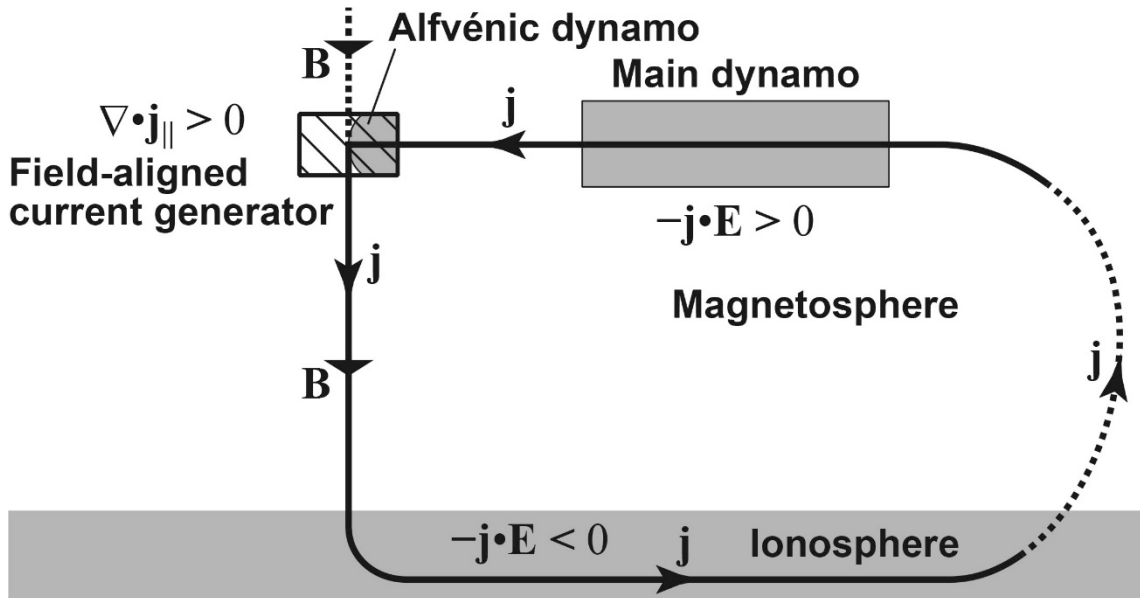


図 2.1 沿磁力線電流源（斜線部分）とダイナモ（磁気圏灰色部分）の関係。

で、「電圧源」という表現もよく使う。これに対し沿磁力線電流源のダイナモは小さいので、ダイナモとしての機能を考えないことが多い。本書もこの考え方に倣い、単に「ダイナモ」と言う場合は電流系の「主要なダイナモ」を指すことにする。また、沿磁力線電流源を単に「電流源」と称し、ダイナモすなわち「電圧源」と対照的に使うこともある。しかし「電流源」は文字通り「電流すなわち電磁エネルギーを作り出すもの」という意味に取られ、ダイナモと同義のものを連想させる。したがって本書では省略形は用いない。沿磁力線電流源とダイナモは大規模電流系の重要な構成要素である。一般に沿磁力線電流源とダイナモは独立であってよい。しかし大規模電流系では両者は結合して現れる(4章)。

沿磁力線電流源に内在するダイナモは小さいので考慮しなくてよいと述べたが、アルヴェンモード擾乱を理解するという目的で少し考察してみる。図 2.2 のように、背景に一樣な磁場 \mathbf{B}_0 があり、原

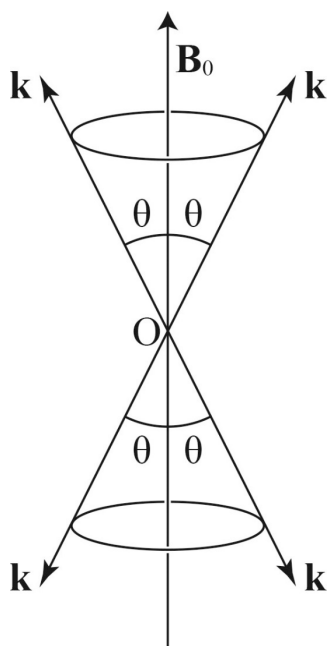


図 2.2 MHD 擾乱をオイラー的に考察する場合の設定。背景磁場 \mathbf{B}_0 と波数ベクトル \mathbf{k} は全方向に鋭角 θ をなす。

点 O から波数 \mathbf{k} の波が \mathbf{B}_0 と鋭角 θ をなしてあらゆる方向に出てゆく場合を考える。すなわち \mathbf{k} は磁力線を母線、頂点を O とする円錐面上にある。また磁力線と反対方向にも対称的に、波は \mathbf{k} と $-\mathbf{B}_0$ が鋭角 θ をなしてあらゆる方向に出てゆく。このように、一樣背景磁場 \mathbf{B}_0 のもとで軸対称的に原点 O から出ていく擾乱をオイラー的に(すなわち場の量として)考察する。この状況下でアルヴェンモード擾乱を考えると、図 2.3 が得られる。図 2.3a は最初真つすぐな磁束管が時計回りの回転

運動で振じられていくときの擾乱を表している. 図 2.3b はその振じられた磁束管が反時計回りの回転運動で真っすぐな磁束管に戻ってゆくときの擾乱である. 図 2.3c は最初真っすぐな磁束管が反時計回りの回転運動で振じられていくときの擾乱を表している. 図 2.3d はその振じられた磁束管が時計回りの回転運動で真っすぐな磁束管に戻ってゆくときの擾乱である. 擾乱を波として捉えた場合, 図 2.3a, 図 2.3b, 図 2.3c, 図 2.3d それぞれが 4 分の 1 周期の変動に相当し, 図 2.3a⇒図 2.3b⇒図 2.3c⇒図 2.3d⇒図 2.3a と繰り返される. 原点 O 近傍の状況を見ると, $\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel}$ と $\nabla \cdot \mathbf{j}_{\perp}$ が逆位相になっているのが分かる. また, 図 2.3a と図 2.3c では $\sigma_m = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} > 0$ となるダイナモであり, 図 2.3b と図 2.3d では $\sigma_m < 0$ となるロードである. アルヴェンモード擾乱ではプラズマ圧は変動しない ($\sigma_{p\perp} = 0$). したがってエネルギー変換は, 流れの運動エネルギーと電磁エネルギーの間で起こる ($\sigma_m + \sigma_{k\perp} = 0$). 図 2.3 に示す 4 つのアルヴェンモード擾乱のうち, 図 2.3c ($\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} > 0$ となるダイナモ) が図 2.1 の沿磁力線電流源に相当する. 図 2.1 には陽に示していないが, 図 2.1 の電流回路の右側部分には $\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} < 0$ なる沿磁力線電流源が存在する. これは図 2.3a のアルヴェンモード擾乱 ($\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} < 0$ となるダイナモ) に相当する. 参考のため, アルヴェンモード擾乱における横方向のエネルギー変換を表 2.1 にまとめた.

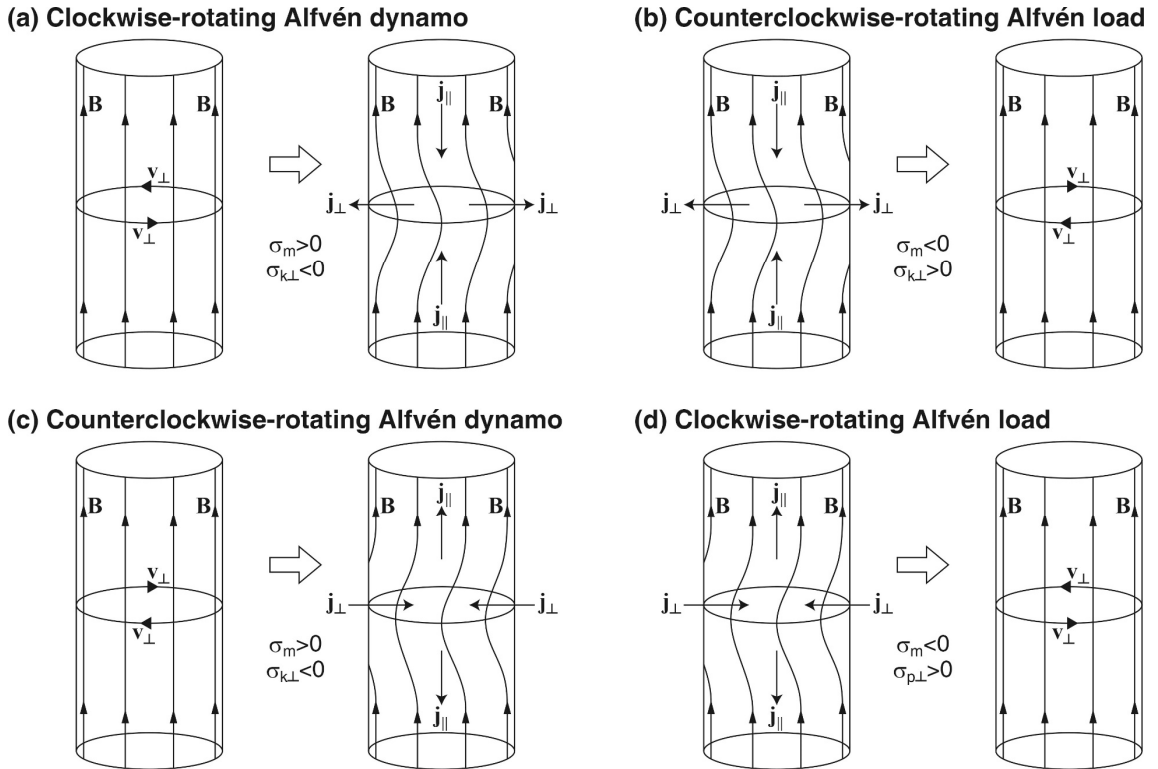


図 2.3 アルヴェンモード擾乱のオイラー的描像.

表 2.1 アルヴェンモード擾乱の横方向エネルギー変換

	(a) 右回転アルヴェンダイナモ	(b) 左回転アルヴェンロード	(c) 左回転アルヴェンダイナモ	(d) 右回転アルヴェンロード
σ_m	+	−	+	−
$\sigma_{p\perp}$	0	0	0	0
$\sigma_{k\perp}$	−	+	−	+

2.2 沿磁力線電流を生む空間構造

沿磁力線電流源の本質はいかにしてアルヴェンモード擾乱を励起するかであるのだが、その詳細な機構は問わず、どのような（時）空間構造があれば沿磁力線電流源になるかという定式化は早くから行われていた（Hasegawa and Sato, 1979; Sato and Iijima, 1979; Vasyliunas, 1984; Haerendel, 1990）。これは大規模電流系を考察する際に有用なので、以下これを紹介する。MHD の時間・空間スケールでは電荷密度の時間変化 $\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$ は無視できる。したがって電荷保存則(T1.20)から

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{\perp} \quad (2.1)$$

すなわち沿磁力線電流は垂直電流の発散から生じる。垂直電流はプラズマにアンペール力を及ぼす。アンペール力とつりあう力は何かが問題になる。運動方程式 ((1.14b)式でアンペール力を $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ としたもの) より形式的に

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p + \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv -\mathbf{F} \quad (2.2)$$

とおくと、垂直電流は

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.3)$$

と表される。理想 MHD では、垂直電流は圧力勾配力 $\mathbf{F}_p = -\nabla p$ に起因する反磁性電流

($\mathbf{j}_{vp} \equiv \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2}$) か、慣性力 $\mathbf{F}_k = -\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ に起因する慣性電流 ($\mathbf{j}_m \equiv \frac{\mathbf{B}}{B^2} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$) のいずれかで

ある。ところで、かつて region 1 の電流源を低緯度境界層の速度シアとするモデリングが行われ（Sonnerup, 1980; Lotoko et al., 1987; Siscoe et al., 1990）、最近でも続いている（Echim et al., 2007, 2008; Johnson and Wing, 2015; Wing and Johnson, 2015）。このモデルでは垂直電流として粘性力

$\mathbf{F}_{vis} = \mu \nabla^2 \mathbf{v}$ に起因する「粘性電流」 $\mathbf{j}_{vis} \equiv -\frac{\mu}{B^2} \mathbf{B} \times \nabla^2 \mathbf{v}$ を考え（ μ は剪断粘性係数）、その発散

が沿磁力線電流になる。しかし MHD シミュレーションではそのような解は現れない。MHD シミュレ

ーションにおける region 1 磁力線は確かにその一部が低緯度境界層とつながっているが, region 1 電流線は低緯度境界層に届かない (Tanaka, 1995; Janhunen & Koskinen, 1997; Siscoe et al., 2000). 磁気圏には有限のプラズマ圧 p が存在するので, 有限の垂直電流 $\mathbf{j}_{\nabla p}$ がある. このため低高度から region 1 電流線を追跡すると, 高高度において電流線は磁力線と次第に解離していき, 結局電流線は低緯度境界層に到達しない. このように, 低高度からの磁力線投影と電流線投影が大きくずれることは珍しくない. 例えばサブストーム開始時に形成される「楔型電流系」も, MHD シミュレーションの解では電流線が赤道面まで届かない (Ebihara & Tanaka, 2015). 赤道面を朝方から夕方に向かって流れる尾部電流が寸断されて楔型電流系が形成されるという従来のモデル (Clauer and McPherron, 1974) は誤りのように思える. このように, 磁力線にそって沿磁力線電流を赤道面に投影しその生成機構を考察するという従来の手法は見直す必要がある.

以下 \mathbf{j}_{vis} は考えず理想 MHD で話を続ける. (2.3) を (2.1) に代入すると,

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} = \left(\nabla \ln B^2 \right) \cdot (\mathbf{j}_{\nabla p} + \mathbf{j}_{in}) - \frac{\mathbf{B}}{B^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (2.4)$$

となる. $\nabla \times \mathbf{F}$ の項は慣性力のみが残り,

$$\frac{\mathbf{B}}{B^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = (\nabla \ln \rho) \cdot \mathbf{j}_{in} - \rho \frac{\mathbf{B}}{B^2} \cdot \left(\nabla \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \quad (2.5)$$

となる. (2.5) の第 2 項は渦ベクトル $\boldsymbol{\Omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ に関係している. ファラデーの法則 (1.14d), 連続の式 (1.14a), オームの法則 (1.16a) を用いて変形すると, $\boldsymbol{\Omega}$ を磁力線方向と磁力線に垂直方向に分解した表現を得ることができる. 結果は

$$\frac{\mathbf{B}}{B^2} \cdot \left(\nabla \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\Omega_{\parallel}}{B} \right) - \frac{1}{B} (\boldsymbol{\Omega}_{\perp} \mathbf{b} + \mathbf{b} \boldsymbol{\Omega}_{\perp}) : \nabla \mathbf{v} \quad (2.6)$$

となる. ここで $\boldsymbol{\Omega}_{\perp} \mathbf{b} + \mathbf{b} \boldsymbol{\Omega}_{\perp}$ は対角和をもたない対称テンソル (deviator と呼ばれる) であることに注意しよう. 一般に 2 階テンソルの deviator とは, その対称部分から対角和を除いたものである (付録 A2.1 参照). Deviator の性質から, $(\boldsymbol{\Omega}_{\perp} \mathbf{b} + \mathbf{b} \boldsymbol{\Omega}_{\perp}) : \nabla \mathbf{v}$ の計算において, $\nabla \mathbf{v}$ の deviator 以外は消える. したがって, (2.6) における $\nabla \mathbf{v}$ はその deviator

$$\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v} \equiv \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right) - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I}$$

で置き換えることができる. ここで $(\nabla \mathbf{v})^T$ は $\nabla \mathbf{v}$ の転置テンソル, \mathbf{I} は 2 階の単位テンソルである.

$\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v}$ は速度勾配テンソル $(\nabla \mathbf{v})$ のうち, 回転運動 $(\nabla \times \mathbf{v})$ 部分でも圧縮運動 $(\nabla \cdot \mathbf{v})$ 部分でもないもの (回転も体積変化も伴わない純粋な変形運動) である. 全項まとめて整理すると

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} = \left(\nabla \ln B^2 \right) \cdot \mathbf{j}_{\nabla p} + \left(\nabla \ln \frac{B^2}{\rho} \right) \cdot \mathbf{j}_{in} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\Omega_{\parallel}}{B} \right) - \frac{\rho}{B} (\boldsymbol{\Omega}_{\perp} \mathbf{b} + \mathbf{b} \boldsymbol{\Omega}_{\perp}) : \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v} \right) \quad (2.7)$$

以上の定式化で近似は全く行っていない。 $(\nabla \ln B^2) \cdot \mathbf{j}_{\nabla p}$ の項は反磁性電流の発散で、それ以外は全て慣性電流の発散から出てくる。プラズマの圧縮運動の効果は(2.7)には陽に現れないが、 \mathbf{j}_{in} と $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{B}\right)$ に陰に入っている。また(2.7)はその導出過程からわかるように、エネルギーの考察は全く入っていない。4.2 節において(2.7)をダイナモ(エネルギーの考察)と結びつける。

グローバル MHD ミュレーションが現れるまでは、region 2 は反磁性電流の発散が作るというコンセンサスがあったものの、region 1 については慣性電流の発散が重要であろうという漠然とした意見しかなかった。またこれとは別に、粘性電流 \mathbf{j}_{vis} の発散を考える低緯度境界層モデル(上述)もさかんに研究された。これに対し、最近のグローバル MHD シミュレーションが示す解は、region 1, region 2 ともに反磁性電流の発散が支配的であるというものである(Watanabe et al., 2019)。磁気圏内では流れの運動エネルギーはプラズマ熱エネルギーや電磁エネルギーに比べて小さく、多くの場合は無視できる($\rho v^2 \ll p, \frac{B^2}{\mu_0}$)。運動方程式では慣性力が圧力勾配力やアンペール力に比べて無視でき、アンペール力と圧力勾配力がつりあう形になっている。

Region 1 や region 2 のような大規模沿磁力線電流系では反磁性電流の発散が重要なので、以下慣性項は無視しよう。慣性項を無視すると力のつりあいは

$$\frac{B^2}{\mu_0}(\boldsymbol{\kappa}_C - \boldsymbol{\kappa}_B) = \nabla_{\perp} p \quad (2.8)$$

となる。ここで $\boldsymbol{\kappa}_C \equiv (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}$ は磁場曲率ベクトルである。またナブラの磁力線に垂直な成分を $\nabla_{\perp} \equiv -\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \nabla)$ と導入し($\mathbf{b} \equiv \frac{\mathbf{B}}{B}$ は磁力線方向の単位ベクトル)、磁場強度勾配の磁力線に垂直な成分を $\boldsymbol{\kappa}_B \equiv \nabla_{\perp} \ln B$ と表している。一方、沿磁力線電流の生成は(2.7)の第 1 項より

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} = \frac{2\mathbf{B} \cdot (\nabla p \times \nabla B)}{B^3} \quad (2.9)$$

となる。 $\boldsymbol{\kappa}_B$ の定義と(2.8)の関係を用いれば、(2.9)は以下のように様々な形で表現できる。

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} = \frac{2}{B} \mathbf{b} \cdot (\nabla p \times \boldsymbol{\kappa}_B) = \frac{2}{B} \mathbf{b} \cdot (\nabla p \times \boldsymbol{\kappa}_C) = \frac{2}{B} \mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\kappa}_C \times \boldsymbol{\kappa}_B) \quad (2.10)$$

(2.10)の関係は、4 章で沿磁力線電流源とダイナモの結合を議論する際に再び出てくる。(2.9)や(2.10)の解釈で注意すべきことがある。完全な MHD 平衡(すなわち、いたるところ $\mathbf{v} = \mathbf{0}$)を仮定すれば、反磁性電流のみが沿磁力線電流を作る(2.9)や(2.10)は厳密に成立し得る。しかし $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ よりエネルギー輸送がないので、電流系にわずかもエネルギー散逸があると平衡は保たれない。したがって一般には小さくても慣性項が必ず存在する($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$)。この意味で(2.9)や(2.10)は近似式である。背景に \mathbf{v} が隠れていることを忘れてはならない。

ところで $\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} = B \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{j_{\parallel}}{B} \right)$ と表されるので、これを磁力線に沿って積分すると

$$\frac{j_{\parallel}(s)}{B(s)} = \int_0^s \frac{ds}{B} \nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} \quad (2.11)$$

となる。ここで s は磁力線に沿う長さを表し、磁力線方向の座標として用いている。また座標の原点を沿磁力線電流が 0 となる点（例えば閉じた磁力線では赤道面、開いた磁力線では無限遠）にっている。恒等式(2.11)に(2.7)や(2.9)を用いると電離圏高度（座標 s ）における沿磁力線電流を与える式が得られる。しかしこれを用いる際には注意が必要である。先に電離圏から磁気圏への電流線投影と磁力線投影積分が大きくずれる場合が多々あると述べた。このような場合には(2.11)式の右辺は磁力線上の沿磁力線電流源を形式的に足し合わせているに過ぎない。電流系の解釈で重要なのは電流線上の実効的沿磁力線電流源である。この問題については 4.3 節で議論する。

(2.11)式から得られる沿磁力線電流は形式的な場合もあると述べたが、磁気圏まで磁力線と電流線がそれほどずれない場合はもちろん意味をもつ。例えば(2.11)式と(2.9)式を組み合わせた

$$\frac{j_{\parallel}(s)}{B(s)} = \int_0^s \frac{ds}{B} \frac{2\mathbf{B} \cdot (\nabla p \times \nabla B)}{B^3} \quad (2.12)$$

は region 2 の説明に用いられてきた。実際 MHD シミュレーションでもその機構が再現されている。アンペール力と圧力勾配力が厳密につりあうときは（すなわち MHD 平衡では）、磁力線に沿って圧力 p が一定となり、(2.12)の積分を解析的に実行することができる。結果は

$$j_{\parallel}(s) = \mathbf{b} \cdot (\nabla V \times \nabla p) \quad (2.13)$$

となる。ここで $V(s) \equiv \int_0^s \frac{ds}{B}$ は比磁束管体積（単位磁束当りの磁束管体積）を表す。また(2.13)の

右辺に現れる \mathbf{b} や ∇ は、積分の上端 s での値や演算である。ところで、(2.13)の導出を(2.12)の積分計算から直接行うのはかなり困難である。参考のため、オイラーポテンシャルを用いた(2.13)のエレガントな導出方法を付録 A2.2 に紹介する (Stern, 1994)。(2.13)の導出に近似は用いていない（ただし厳密な MHD 平衡を仮定した）。ここで以下の近似を行う。オイラーポテンシャルを用いて磁場を $\mathbf{B} = \nabla \alpha \times \nabla \beta$ と表すと、圧力は磁力線に沿って一定なので $p = p(\alpha, \beta)$ である。一方、比磁束管体積は $V = V(\alpha, \beta, s)$ であるが、これを $V \approx V(\alpha, \beta)$ と近似する。積分の上端 s は通常電離圏高度にとるので、これは比較的よい近似である。そうすると(2.13)の右辺に現れる ∇ を、隣接する磁束管同士で差をとる微分演算子 $\hat{\nabla} \equiv \nabla \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \nabla \beta \frac{\partial}{\partial \beta}$ で置き換えることができる。一般には、

$\nabla s \nparallel \mathbf{B}$ なので ∇s も \perp 成分をもち $\hat{\nabla} \neq \nabla_{\perp}$ であることに注意しよう。この近似を行うと、(2.13)は

$$j_{\parallel}(s) \approx \mathbf{b} \cdot (\hat{\nabla} V \times \hat{\nabla} p) \quad (2.14)$$

と表される。(2.14)の右辺の \mathbf{b} や $\hat{\nabla}$ は, 積分の上端 s (すなわち電離圏) での値や演算であるが, V と p が s に依存しないので磁束管上のどの点で計算してもよい. ただしその際は $\nabla\alpha$, $\nabla\beta$ のスケール因子から出てくる係数が現れる.(2.14)の右辺を計算する点(例えば赤道面)での B , \mathbf{b} , $\hat{\nabla}$ を添字 e で B_e , \mathbf{b}_e , $\hat{\nabla}_e$ と表す. $|\hat{\nabla}V \times \hat{\nabla}p| \propto |\nabla\alpha \times \nabla\beta| = B$ となるので, (2.14)は

$$\frac{j_{\parallel}(s)}{B(s)} = \frac{\mathbf{b}_e}{B_e} \cdot (\hat{\nabla}_e V \times \hat{\nabla}_e p) \quad (2.15)$$

となる. 宇宙空間物理学で(2.15)は Vasyliunas 方程式と呼ばれており (Vasyliunas, 1970, (6)式), 夜側 region 2 の沿磁力線電流生成を議論する際によく使われる (例えば Heinemann et al., 1989). ただし, 最初に(2.15)式を導いたのは Grad (1964, (3.10)式) のようである.

付録

A2.1 2 階テンソルの規約分解

2 階テンソル $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ の対称部分 $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^s$ と反対称部分 $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^a$ は, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ の転置テンソルを $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$ と書くと, それぞれ $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^s = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T)$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^a = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T)$ で与えられる. 今, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ に対し

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{scalar (trace)} & \overset{\times}{A} \equiv \underline{\underline{\mathbf{I}}} : \underline{\underline{\mathbf{A}}} \\ \text{vector} & \overset{\dagger}{\mathbf{A}} \equiv \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \times \underline{\underline{\mathbf{I}}} : \underline{\underline{\mathbf{A}}} \\ \text{deviator} & \overset{\circ}{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \equiv \underline{\underline{\mathbf{A}}}^s - \frac{1}{3} \overset{\times}{A} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \end{array} \right.$$

と 3 つの量を定義する. ここで $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ は単位テンソルである. また「scalar」, 「vector」という呼称は, 通常の (Gibbs 流の) ベクトル解析で用いられる「スカラー」, 「ベクトル」と関係はあるが, 少し意味が違う. 通常のベクトル解析で出てくる用語「スカラー」, 「ベクトル」を用いると, $\overset{\times}{A}$ はスカラー (0 階のテンソル), $\overset{\dagger}{\mathbf{A}}$ は擬ベクトル (1 階の擬テンソル), $\overset{\circ}{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$ は 2 階のテンソルである. これら 3 つの量を用いて, 2 階のテンソルは

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \overset{\circ}{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} - \overset{\dagger}{\mathbf{A}} \times \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \frac{1}{3} \overset{\times}{A} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (3) \quad (2) \quad (1)$$

と 3 つの部分に分解される. これを 2 階テンソルの規約分解という. 各部分の意味を簡単に述べると

(1) Scalar 部分: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ が表す力学的性質のうち, 方向に依存しない部分. 等方部分. $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ は 2 階等方テンソルである. 係数 $\frac{1}{3} \overset{\times}{A}$ は $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ の対角成分の平均を表す. 自由度は 1 ($\overset{\times}{A}$ の 1 成分).

(2) Vector 部分: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ の反対称部分. $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^a = -\underline{\underline{\mathbf{I}}} \times \overset{\dagger}{\mathbf{A}} = -\overset{\dagger}{\mathbf{A}} \times \underline{\underline{\mathbf{I}}}$ の関係がある. 自由度は 3 (2 階反対称テンソルの独立成分は 3 個, すなわち, $\overset{\dagger}{\mathbf{A}}$ の 3 成分).

(3) Deviator 部分: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ の対称部分のうち等方部分 (scalar 部分) を除いたもの. “Deviate” は等方部分からの「ずれ」を意味する. 定義から対角和は 0 となる. 自由度は 5 (2 階対称テンソルの独立成分は 6 個あるが, 対角和が 0 なので自由度が 1 減る).

速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の scalar は圧縮運動 ($\overset{\times}{\nabla \mathbf{v}} = \nabla \cdot \mathbf{v}$) を表し, vector は回転運動

($\overset{\uparrow}{\nabla} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$)を表す. Deviator $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v}$ は圧縮運動でも回転運動でもない部分 (回転も体積変化も伴わない純粋な変形運動) である.

A2.2 Vasyliunas 方程式のオイラーポテンシャルによる導出

(2.13)式をエレガントに導く方法を紹介する (Stern, 1994). オイラーポテンシャルを用いて磁場を $\mathbf{B} = \nabla \alpha \times \nabla \beta$ と表す. $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ から \mathbf{j} もオイラーポテンシャルで表現できて, $\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0$ から $p = p(\alpha, \beta)$ は \mathbf{j} のオイラーポテンシャルのひとつである. もうひとつのオイラーポテンシャルを $q = q(\alpha, \beta, s)$ とすれば

$$\mathbf{j} = \nabla q \times \nabla p = \frac{\partial q}{\partial \alpha} \nabla \alpha \times \nabla p + \frac{\partial q}{\partial \beta} \nabla \beta \times \nabla p + \frac{\partial q}{\partial s} \nabla s \times \nabla p$$

\mathbf{B} とクロス積を作ると第 3 項のみが残って

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \times \mathbf{B} &= \frac{\partial q}{\partial s} (\nabla s \times \nabla p) \times \mathbf{B} \\ &= \frac{\partial q}{\partial s} [\nabla p (\mathbf{B} \cdot \nabla s) - \nabla s (\mathbf{B} \cdot \nabla p)] \\ &= B \frac{\partial q}{\partial s} \nabla p \end{aligned}$$

$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$ と比較すると $B \frac{\partial q}{\partial s} = 1$.

$$\therefore q = \int_0^s \frac{ds}{B} \equiv V(\alpha, \beta, s)$$

$$\therefore \mathbf{j}(\alpha, \beta, s) = \nabla V \times \nabla p$$

$$\therefore j_{\parallel}(\alpha, \beta, s) = \mathbf{b} \cdot (\nabla V \times \nabla p)$$

よって本文の(2.13)が得られた.

3 章 ダイナモの一般論

3.1 熱エネルギーを電磁エネルギーに変換するダイナモ

MHD シミュレーションによると、磁気圏内では流れの運動エネルギーはプラズマの熱エネルギーや電磁エネルギーに比べて小さい ($\rho v^2 \ll p, \frac{B^2}{\mu_0}$). 大規模電流系を維持するダイナモでは熱エネルギーを電磁エネルギーに変換している ($\sigma_m \approx -\sigma_{p\perp} > 0$) (Tanaka, 2003; Tanaka et al., 2016). この過程はどのような MHD 擾乱であろうか. 7 個の固有モードのうち、プラズマの圧力変動を伴うものはスローモードとファーストモードである. さらに、プラズマ熱エネルギーの変動と電磁エネルギーの変動は、スローモードでは逆位相でありファーストモードでは同位相になる. したがって熱エネルギーを電磁エネルギーに変換するダイナモを作れるのはスローモード擾乱だけである.

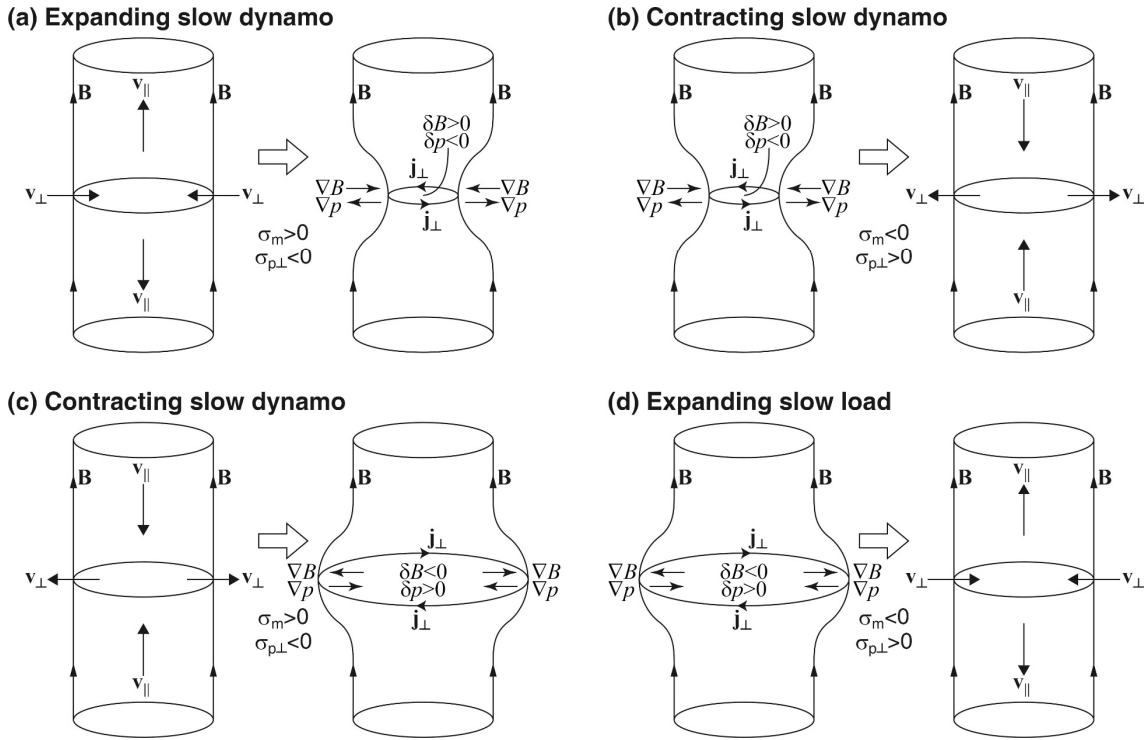


図 3.1 スローモード擾乱のオイラー的描像.

スローモード擾乱を理解するため、図 2.3 で行ったアルヴェンモードと同様の考察を試みる. 図 3.1 は図 2.2 の状況下における 4 種類のスローモード擾乱を示す. δp と δB はそれぞれプラズマ圧力と磁場強度のオイラー的变化を表す. ここでは周期的な変動は考えていないが、擾乱を波として捉えた場合、図 3.1a, 図 3.1b, 図 3.1c, 図 3.1d それぞれが 4 分の 1 周期の変動に相当し、図 3.1a⇒

図 3.1b⇒図 3.1c⇒図 3.1d⇒図 3.1a と繰り返される. 図 3.1a と図 3.1d は気体が膨張 ($\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$) していく過程で, 逆に図 3.1b と図 3.1c は気体が収縮 ($\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$) していく過程である. スローモードでは $\nabla \cdot \mathbf{v}_{\parallel}$ と $\nabla \cdot \mathbf{v}_{\perp}$ が逆位相になるが, 全体の発散 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ は $\nabla \cdot \mathbf{v}_{\parallel}$ と同位相である. さらに σ_m の符号を考えると, 図 3.1a と図 3.1c は $\sigma_m > 0$ となるダイナモ過程であり, 逆に図 3.1b と図 3.1d は $\sigma_m < 0$ となるロード過程である. また $\sigma_{p\perp}$ の符号を考えると, σ_m と逆位相になっている. 流れの運動エネルギーの寄与が小さい場合, (1.19) は $\sigma_m + \sigma_{p\perp} \approx 0$ と近似される. したがって, スローモード擾乱のダイナモ (図 3.1a と図 3.1c) は熱エネルギーを電磁エネルギーに変換し, ロード (図 3.1b と図 3.1d) はその逆になる. 大規模電流系のダイナモは, 膨張するスローモードダイナモ (図 3.1a) か収縮するスローモードダイナモ (図 3.1c) のいずれかである. このように熱エネルギーを電磁エネルギーに変換するダイナモは 2 種類ある.

以上の考察においては流れの運動エネルギーを無視したが, エネルギー変換にはプラズマの流れが必要である. これは変換率 σ_p が \mathbf{v} に依存することから容易に見てとれる. スローモード擾乱を更に理解するために, $\sigma_{k\perp}$ の符号を考察してみよう. (1.14d) を用いて $\sigma_{k\perp}$ の定義式を変形すると

$$\sigma_{k\perp} = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_{\perp}^2}{2} \right) + (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla) \left(\frac{v_{\perp}^2}{2} \right) + v_{\parallel}^2 \mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{\kappa}_C + (\mathbf{v}_{\parallel} \cdot \nabla) v_{\perp}^2 \right] \quad (3.1)$$

となる. 図 3.1 の原点近傍では $v_{\parallel} = 0$ とおけるので, (3.1) の右辺第 1 項と第 2 項のみを考えてもよい. しかし一般性を保つため, ここでは 4 項全て考察してみる. 図 3.1a では (3.1) の右辺 4 項はすべて負であり $\sigma_{k\perp} < 0$ となる. 図 3.1b では (3.1) の右辺 4 項はすべて正であり $\sigma_{k\perp} > 0$ となる. 一方, 図 3.1c と図 3.1d では正負の項が混ざる. 図 3.1c では, (3.1) の右辺第 1 項と第 3 項は負で, 第 2 項と第 4 項が正になる. 後の 3.3 節で議論するが, 図 3.1c の場合には有限の磁場曲率が必要で時間変化がある程度大きくなければならない. これはラグランジェ微分において時間変化項が移流項より大きいことを意味する ($|\mathbf{v} \cdot \nabla| / \left| \frac{\partial}{\partial t} \right|} < 1$). したがって (3.1) の右辺第 2 項と第 4 項の和は, 第 1 項

の大きさより小さいと考えてよからう. すなわち全体として $\sigma_{k\perp} < 0$ となる. 全く同様の議論が図 3.1d の場合にも適用でき, $\sigma_{k\perp} > 0$ となる. 以上の考察から, スローモード擾乱における横方向のエネルギー変換についてまとめたものが表 3.1 である. スローモード擾乱では力学的エネルギー (熱エネルギーと流れの運動エネルギーの総和) と電磁エネルギーの間でエネルギーのやり取りが行われることがわかる.

表 3.1 スローモード擾乱の横方向エネルギー変換

	(a) 膨張するスローダイナモ	(b) 収縮するスローロード	(c) 収縮するスローダイナモ	(d) 膨張するスローロード
σ_m	+	-	+	-
$\sigma_{p\perp}$	-	+	-	+
$\sigma_{k\perp}$	-	+	-	+

図 2.3 および図 3.1 はオイラー的描像 (すなわち場の量としてみた場合) である. 数学的解析にはオイラー的描像が有利であるが, 直観的理解にはラグランジェ的描像 (すなわち磁束管の時間発展を追ったもの) が適している. アルヴェン擾乱のオイラー的描像は図 2.3 から容易に想像できる. 一方, スローモード擾乱のラグランジェ的描像を図 3.1 から想像するのはすぐにはできないので, これを図 3.2 に示す. \dot{p} と \dot{B} はそれぞれプラズマ圧力と磁場強度のラグランジェ微分を表している. ま

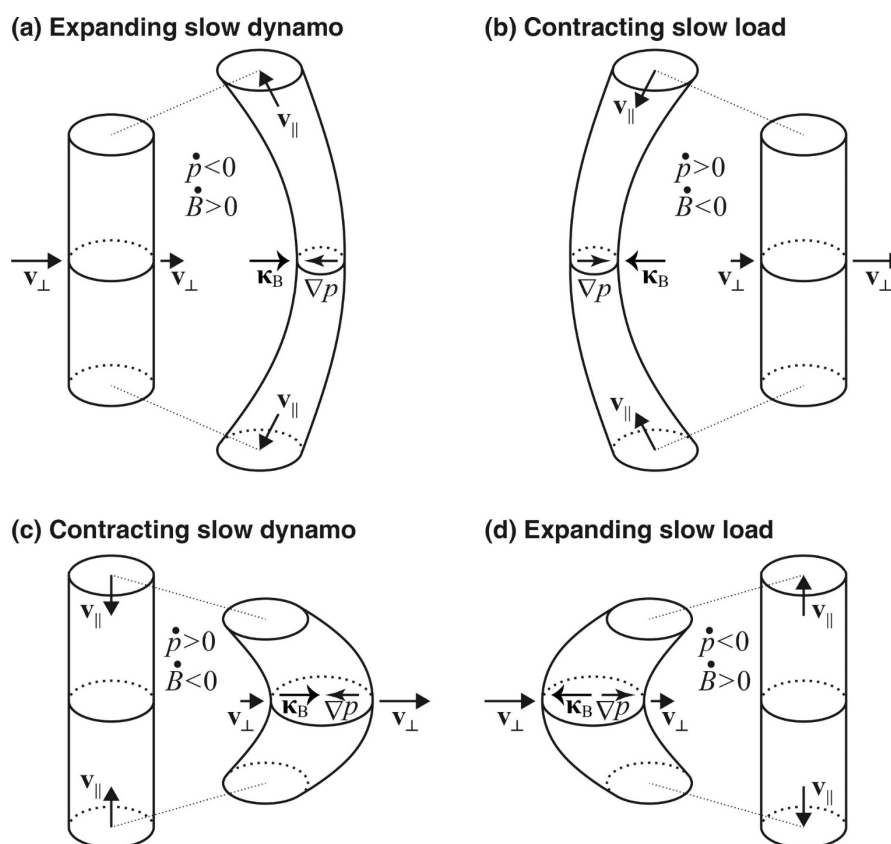


図 3.2 スローモード擾乱のラグランジェ的描像.

た図 3.2a, 図 3.2b, 図 3.2c, 図 3.2d は,それぞれ図 3.1a, 図 3.1b, 図 3.1c, 図 3.1d に対応する. ラグランジェ的描像では「膨張」・「収縮」の意味が直観的に理解できる. 膨張するスローモードダイナモ (図 3.2a) では, 磁束管の運動とともに磁力線に垂直な流れが磁力線方向の流れに変換されることがわかる. 一方収縮するスローモードダイナモ (図 3.2c) では, 磁束管の運動とともに磁力線方向の流れが磁力線に垂直な流れに変換されることがわかる.

比較対照のため, ファーストモード擾乱を同様に考察してみる. 図 3.3 は図 2.2 の状況下におけるファーストモード擾乱のオイラー的描像である. 図 3.1 とよく似ているが, v_{\parallel} の位相と δp の位相が図 3.1 と逆になっている. δp の符号がスローモードと逆のため, $\sigma_{p\perp}$ と σ_m が同符号になる. 一方 $\sigma_{k\perp}$ の符号は(1.19)から必然的に定まり, $\sigma_{p\perp}$ や σ_m と異符号になる. すなわちダイナモ過程 (図 3.3a と図 3.3c) では流れの運動エネルギーが電磁エネルギーと熱エネルギーに変換され, ロード過程 (図 3.3b と図 3.3d) ではその逆になる. ファーストモード擾乱における横方向のエネルギー変換をまとめたものが表 3.2 である. ファーストモード擾乱では, プラズマ圧と磁気圧が協同するのでエネルギー的にも電磁エネルギーと熱エネルギーの和が一塊になる (電磁・熱エネルギーとよぼう). ファーストモード擾乱では電磁・熱エネルギーと流れの運動エネルギーの間でエネルギーがやり取りされる. 図 3.3 では, 磁力線の変形が図 3.1 と同じ様に描いてある. これは分かりやすくするために,

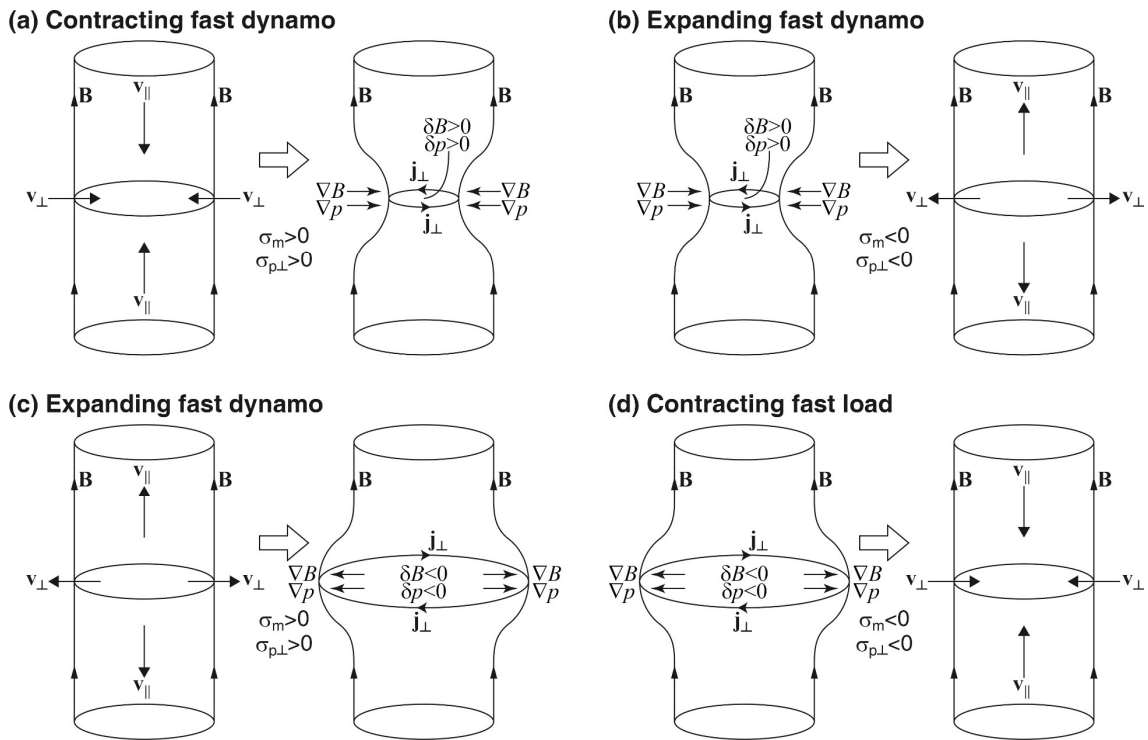


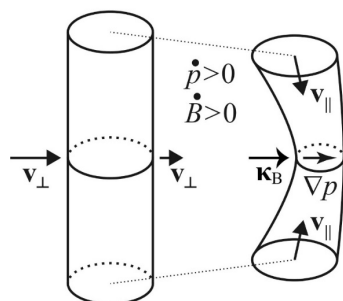
図 3.3 ファーストモード擾乱のオイラー的描像.

実際にはファーストモード擾乱における磁力線の変形はごくわずかである。プラズマ圧と磁気圧が協同するので、ごくわずかの磁場変形で十分な復元力が得られるからである。このため速い変動が可能である（逆にゆっくりとした変動はできない）。これに対しスローモード擾乱では、プラズマ圧と磁気圧が逆位相になるので、磁場変形が大きくならざるを得ず、またゆっくりとした変動しか許されない。図 3.2 と同様に、ファーストモード擾乱のラグランジュ的描像を図 3.4 に示す。 $\nabla \cdot \mathbf{v}_\perp$ と $\nabla \cdot \mathbf{v}_\parallel$ が同位相になるのがファーストモード擾乱の特徴である。磁力線に垂直な流れが弱まるときは磁力線方向の流れも弱まり、磁力線に垂直な流れが強まるときは磁力線方向の流れも強まる。

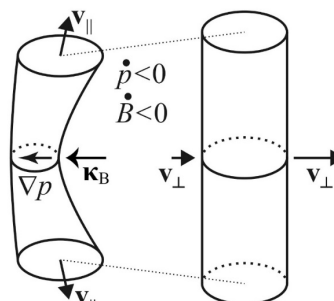
表 3.2 ファーストモード擾乱の横方向エネルギー変換

	(a) 収縮するファーストダイナモ	(b) 膨張するファーストロード	(c) 膨張するファーストダイナモ	(d) 収縮するファーストロード
σ_m	+	-	+	-
$\sigma_{p\perp}$	+	-	+	-
$\sigma_{k\perp}$	-	+	-	+

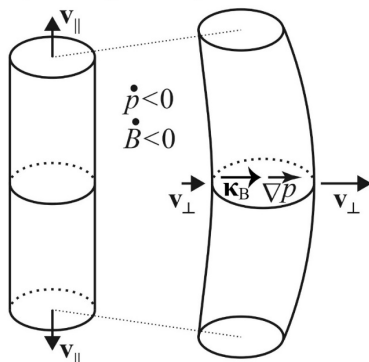
(a) Contracting fast dynamo



(b) Expanding fast load



(c) Expanding fast dynamo



(d) Contracting fast load

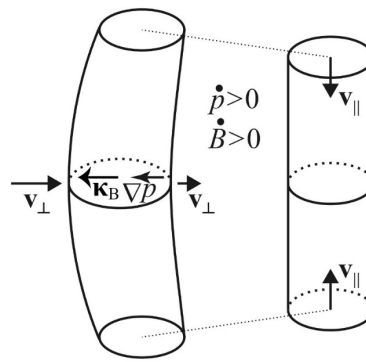


図 3.4 ファーストモード擾乱のラグランジュ的描像。

後の議論のために、いくつかの関係式を導いておく。(1.16a)と(1.16b)を用いると、 σ_m の定義式は

$$\sigma_m = \frac{B^2}{\mu_0} (\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_B - \mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_C) \quad (3.2)$$

と変形される。図 2.3, 図 3.1, 図 3.3 に見られるように、3 つのモード全てにおいて、ダイナモ過程では $\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_B > 0$ かつ $\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_C < 0$ であり、またロード過程では $\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_B < 0$ かつ $\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_C > 0$ となる。アルヴェン擾乱では $\mathbf{\kappa}_B = \mathbf{0}$ なので $\mathbf{\kappa}_C$ の寄与のみである。(1.18c)と(3.2)より

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_m = \frac{B^2}{\mu_0} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \ln B + \mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_B - \mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_C \right] \quad (3.3)$$

を得る。(1.16a)より $\mathbf{S}_m = \frac{B^2}{\mu_0} \mathbf{v}_\perp$ であるので、(3.3)をさらに変形すると

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\perp = -\frac{\partial}{\partial t} \ln B - \mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_B - \mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_C \quad (3.4)$$

となる。(3.2), (3.3), (3.4)は厳密な式であるが、各モードの線形近似を用いる場合は各項のオーダーに注意する必要がある。3.3 節の線形解析で議論するが、 \mathbf{v}_\perp , $\mathbf{\kappa}_B$, $\mathbf{\kappa}_C$ はすべて $O(\varepsilon)$ (ε は微小パラメータ)で、 $\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_B$, $\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_C$ は $O(\varepsilon^2)$ である。前出の(3.2)式において、アルヴェン擾乱で

は線形近似 $\mathbf{\kappa}_B = \mathbf{0}$ を用いて $\sigma_m = \frac{B^2}{\mu_0} \mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_C$ を結論することが許された。しかし、同様に(3.4)式に

においてアルヴェン擾乱の線形近似 $\mathbf{\kappa}_B = \mathbf{0}$, $\nabla \cdot \mathbf{v}_\perp = 0$, $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ を用いると、 $\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_C = 0$ という誤った結論を導いてしまう。

以下本書では大規模電流系を構成する 2 種のスローモードダイナモについてのみ議論する。

3.2. スローモードダイナモの制約

3.2.1 膨張するスローモードダイナモ

ダイナモの定義は $\sigma_m > 0$ であるが、沿磁力線電流系を維持するためには、電磁エネルギーが生まれるだけでなく、ポインティングフラックスとしてダイナモ領域から出ていかなければならない。したがって、(1.18c)より

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_m = -\frac{\partial}{\partial t} \ln B + \sigma_m > 0 \quad (3.5)$$

でなければならない。膨張するスローモードダイナモでは $\frac{\partial}{\partial t} \ln B > 0$ であるので、不等式(3.5)の左

辺第 1 項が第 2 項を相殺してしまう可能性がある。3.3 節で行う線形解析によると、 $\sigma_m \sim O(\varepsilon^2)$ に対し $\frac{\partial}{\partial t} \ln B \sim O(\varepsilon)$ である (ε は微小パラメータ)。したがって第 1 項は容易に第 2 項のダイナモを打ち消してしまう。よって $\nabla \cdot \mathbf{S}_m > 0$ となるためには、膨張するスローモードダイナモは準定常 ($\frac{\partial}{\partial t} \approx 0$) でなければならない。これに対し収縮するスローモードダイナモは $\frac{\partial}{\partial t} \ln B < 0$ であるので、この制約はない。

3.2.2 収縮するスローモードダイナモ

図 3.1a と図 3.1c が示すように、ダイナモ過程では $\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_B > 0$ となる。対応するラグランジェ描像をみると、図 3.2a における $\mathbf{\kappa}_B$ の向きは容易に理解できる。しかし図 3.2c が示す収縮するスローモードダイナモでは、磁場強度は磁束管の運動とともに減少するので、 $\mathbf{\kappa}_B$ の向きは図 3.2c と逆ではないかとも思われる。このパラドックスは以下のように考えれば解決する。オイラー的磁場強度減少 ($\frac{\partial}{\partial t} \ln B < 0$) が十分大きいので、着目している磁束管の (運動方向の) 後方に隣接する磁束管の磁場強度が、着目している磁束管の磁場強度より小さくなる。したがって $\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_B > 0$ となる。このことを以下定量的に考察しよう。

(3.4) を用いると $\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_B > 0$ の条件は

$$\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_B = -\nabla \cdot \mathbf{v}_\perp - \mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_C - \frac{\partial}{\partial t} \ln B > 0 \quad (3.6)$$

と表される。簡単のため、図 3.2a と図 3.2c の磁束管は \mathbf{v}_\perp や $\mathbf{\kappa}_B$ が描かれている面に関して対称であると仮定する。さらに、この対称面近傍のみを考え、磁場は局所的に 2 次元的であると仮定する。そこで図 3.5 に示す 2 次元極座標 (r, φ) を導入する。磁力線に垂直な流れは $\mathbf{v}_\perp = v_r \hat{\mathbf{r}}$ と表される ($\hat{\mathbf{r}}$ は動径方向の単位ベクトル)。これを用いて垂直流の発散は

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\perp = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{R_C} = \frac{\partial v_r}{\partial r} - \mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_C \quad (3.7)$$

と表される。ここで R_C は磁力線の曲率半径である。(3.7) を用いると、不等式(3.6)は

$$\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_B = -\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} \ln B > 0 \quad (3.8)$$

と変形される。収縮するスローモードダイナモでは $\frac{\partial v_r}{\partial r} > 0$ かつ $\frac{\partial}{\partial t} \ln B < 0$ であるので、不等式

(3.8) の左辺 2 項は打ち消しあう。3.3 節で示す線形解析によると、 $\frac{\partial v_r}{\partial r} \sim O(\varepsilon)$ かつ

$\frac{\partial}{\partial t} \ln B \sim O(\varepsilon)$ である (ε は微小パラメータ). したがって $\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_B > 0$ の条件が満たされるためには, 時間変化が十分大きくて, 不等式(3.8)の左辺第 2 項が第 1 項を上回らなければならない. ゆえに収縮するスローモードダイナモには有限の時間変化 ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$) が必要であり定常解は存在しない. 一方, 膨張するスローモードダイナモは $\frac{\partial v_r}{\partial r} < 0$ であるので, 3.2.1 節で議論したように準定常で ($\frac{\partial}{\partial t} \approx 0$) でありさえすれば, 不等式(3.8)は満たされる.

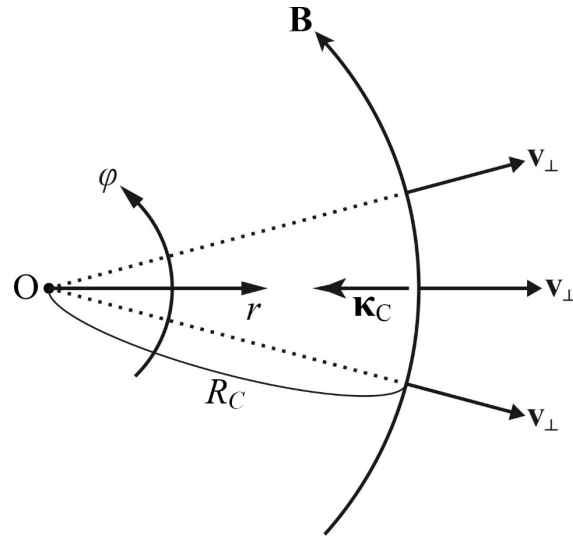


図 3.5 図 3.2 の曲がった磁束管を解析するために導入する局所円筒座標系.

同様の議論が圧力勾配の向きについても行える. 図 3.1a と図 3.1c が示すように, ダイナモ過程では $(\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla) p < 0$ となる. 対応するラグランジェ描像をみると, 図 3.2a における ∇p の向きは容易に理解できるものの, 図 3.2c に示す収縮するスローモードダイナモではプラズマ圧は磁束管の運動とともに増加するので, ∇p の向きは図 3.2c と逆ではないかとも思われる. このパラドックスも時間変化を考えれば解決する. オイラー的プラズマ圧増加 ($\frac{\partial p}{\partial t} > 0$) が十分大きいので, 着目している磁束管の (運動方向の) 後方に隣接する磁束管のプラズマ圧が, 着目している磁束管のプラズマ圧より大きくなる. したがって $(\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla) p < 0$ となる. (1.14c) より, $(\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla) p < 0$ の条件は

$$(\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla) p = -\frac{\partial p}{\partial t} - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} < 0 \quad (3.9)$$

と書ける. 収縮するスローモードダイナモでは $\frac{\partial p}{\partial t} > 0$ かつ $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$ であるので, 不等式(3.9)の左辺 2 項は打ち消しあう. 3.3 節の線形解析で示すように, 両項とも $O(\varepsilon)$ である. よって $(\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla) p < 0$ の条件が満たされるためには, 第 1 項が十分大きくなければならず, 有限の時間変化が必要である. 対照的に, 膨張するスローモードダイナモでは $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$ であるので, 3.2.1 節で議論したように準定常 ($\frac{\partial}{\partial t} \approx 0$) である限り不等式(3.9)は満たされる.

3.2.3 スローモードダイナモにおける制約のまとめ

膨張するスローモードダイナモは準定常 ($\frac{\partial}{\partial t} \approx 0$) でなければならず, 一方収縮するスローモードダイナモは有限の時間変化をもつ ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$). 表 3.3 は 2 種のダイナモの特性を対照させたものである. 表中「磁場強度勾配 (κ_B^*) と磁場曲率 (κ_C^*) の対比」は 3.3 節で行う線形解析に基づいている. ここで κ_B^* と κ_C^* はそれぞれスローモード擾乱が作る局所的電流による κ_B と κ_C である (詳しい定義は 3.3 節で示す). 膨張するスローモードダイナモの重要例はカスプマントル領域にある region 1 のダイナモである (Tanaka et al., 2016). 一方, 収縮するスローモードダイナモの例はプラズマシート内縁に現れる夜側 region 2 のダイナモである (Watanabe et al., 2019).

表 3.3 スローモードダイナモ 2 種の対比

	膨張するスローモードダイナモ	収縮するスローモードダイナモ
時間変化	$\frac{\partial B}{\partial t} \approx 0, \frac{\partial p}{\partial t} \approx 0$	$\frac{\partial B}{\partial t} < 0, \frac{\partial p}{\partial t} > 0$
磁場強度勾配 (κ_B^*) と 磁場曲率 (κ_C^*) の対比	$ \kappa_B^* \gg \kappa_C^* $	$\kappa_C^* \neq 0$
垂直流の発散	$\nabla \cdot \mathbf{v}_\perp < 0$	$\nabla \cdot \mathbf{v}_\perp > 0$
平行流の発散	$\nabla \cdot \mathbf{v}_\parallel > 0$	$\nabla \cdot \mathbf{v}_\parallel < 0$
例	Region 1 (カスプ/マントル)	夜側 region 2 (プラズマシート 内縁)

3.3 線形解析

スローモードダイナモに関して更なる洞察を加えるため, 線形解析を行う. 図 3.6 のようにある適当な境界 C を考え, 磁場を境界外の電流 \mathbf{j}_0 による局所的

ポテンシャル磁場 $\mathbf{B}_0 = \nabla \psi$ (ψ はスカラーポテンシャル) と境界内の局所的電流による擾乱磁場 $\delta\mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0$ に分ける. 背景磁場 \mathbf{B}_0 は境界の取り方に依存する. 具体的に境界をどうとるかは問題であるが, ここでは概念を説明するのが目的なので特に言及しない. また $\varepsilon \equiv \frac{|\delta\mathbf{B}|}{B_0} \ll 1$ かつ $\mathbf{v} \sim O(\varepsilon)$ を仮定する. ここで 1 次のベクトル量 $\mathbf{\kappa}_B^*$ と $\mathbf{\kappa}_C^*$ を以下のように導入する.

$$\begin{cases} \mathbf{\kappa}_B^* \equiv \mathbf{\kappa}_B - \mathbf{\kappa}_0 = \nabla_{\perp 0} \left(\frac{\delta B_{\parallel 0}}{B_0} \right) + O(\varepsilon^2) \\ \mathbf{\kappa}_C^* \equiv \mathbf{\kappa}_C - \mathbf{\kappa}_0 = (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla) \left(\frac{\delta \mathbf{B}_{\perp 0}}{B_0} \right) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.10)$$

新たに導入された記号の定義は, $\mathbf{\kappa}_0 \equiv \frac{\nabla_{\perp 0} B_0}{B_0} = (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla) \mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_0 \equiv \frac{\mathbf{B}_0}{B_0}$, $\nabla_{\perp 0} \equiv -\mathbf{b}_0 \times (\mathbf{b}_0 \times \nabla)$, $\delta \mathbf{B}_{\perp 0} \equiv (\mathbf{b}_0 \times \delta \mathbf{B}) \times \mathbf{b}_0$, $\delta B_{\parallel 0} \equiv \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{B}$ である. 添字 $\parallel 0$ と $\perp 0$ は背景磁場 \mathbf{B}_0 に平行あるいは垂直な成分を表す. したがって添字に 0 が含まれていても 0 次の量であることを意味しない. また注意すべき点として $\mathbf{\kappa}_0$ は必ずしも 0 次の量ではないことがある. 例えば \mathbf{B}_0 が一様な場合は $\mathbf{\kappa}_0 = \mathbf{0}$ である. \mathbf{B}_0 は局所的電流とは無関係なので, $\mathbf{\kappa}_0$ はダイナモに寄与しない. 必然的に(3.2)は

$$\sigma_m = \frac{B^2}{\mu_0} (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{\kappa}_B^* - \mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{\kappa}_C^*) \quad (3.11)$$

となる. (3.11) より, $\sigma_m \sim O(\varepsilon^2)$ であることが分かる.

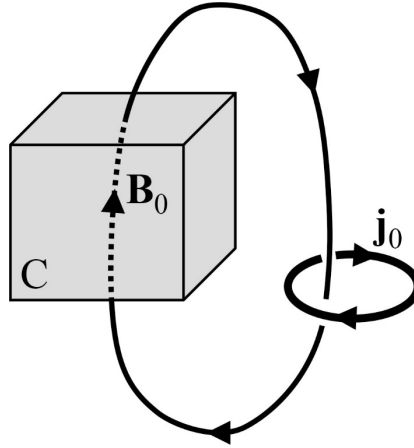


図 3.6 背景ポテンシャル磁場 \mathbf{B}_0 の定義.
C は対象となる領域の境界, \mathbf{j}_0 は境界外で閉じる全ての電流を表す.

ここでさらにラグランジェ変位 ξ を導入する。ラグランジェ変位は流体粒子の初期位置 \mathbf{r}_0 と時刻 t の位置 \mathbf{r} の差 $\xi = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ で定義される。 ξ は \mathbf{r}_0 と t の関数 $\xi(\mathbf{r}_0, t)$ である。一般に \mathbf{r}_0 を指定すれば流体粒子を特定できるので、 $\xi(\mathbf{r}_0, t)$ を調べることは流体粒子の運動を追いかけることに相当する。このように \mathbf{r}_0 と t の関数で表される量をラグランジェ変数という。これに対し流体力学や電磁気学で用いられる場の量は \mathbf{r} と t の関数である。このような量をオイラー変数とよぶ。 ξ はラグランジェ変数であるが、線形近似では \mathbf{r}_0 と \mathbf{r} の差は小さいので無視できる。したがって ξ をオイラー変数 $\xi(\mathbf{r}, t)$ として扱うことができる。また速度場 \mathbf{v} との関係は $\mathbf{v} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ と表すことができる。

ξ を用いて、擾乱磁場 $\delta \mathbf{B}$ を

$$\delta \mathbf{B} = -\mathbf{B}_0 \nabla \cdot \xi_{\perp 0} - (\xi_{\perp 0} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \xi_{\perp 0} + O(\varepsilon^2) \quad (3.12)$$

と表すことができる (例えば Alperovich and Fedorov, 2007)。ここで $\xi_{\perp 0} \equiv (\mathbf{b}_0 \times \xi) \times \mathbf{b}_0$ である。擾乱磁場はさらに 2 成分に分解することができて

$$\begin{cases} \frac{\delta B_{\parallel 0}}{B_0} = -\nabla \cdot \xi_{\perp 0} - 2\xi_{\perp 0} \cdot \kappa_0 + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.13a)$$

$$\begin{cases} \frac{\delta \mathbf{B}_{\perp 0}}{B_0} = (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla) \xi_{\perp 0} + (\xi_{\perp 0} \cdot \kappa_0) \mathbf{b}_0 - (\xi_{\perp 0} \cdot \nabla) \mathbf{b}_0 + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.13b)$$

となる。(3.13)を(3.10)に代入すると

$$\begin{cases} \kappa_B^* = -\nabla_{\perp 0} (\nabla_{\perp 0} \cdot \xi_{\perp 0}) - 2\nabla_{\perp 0} (\xi_{\perp 0} \cdot \kappa_0) + O(\varepsilon^2) \\ \kappa_C^* = (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla)^2 \xi_{\perp 0} + (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla) [\xi_{\perp 0} \cdot (\kappa_0 \mathbf{b}_0 - \nabla \mathbf{b}_0)] + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.14)$$

を得る。大雑把な見積りのため、ここで $\nabla_{\perp 0} \kappa_0$ と $(\mathbf{b}_0 \cdot \nabla)(\kappa_0 \mathbf{b}_0 - \nabla \mathbf{b}_0)$ の寄与を無視する。この仮定は常に正当化されるとは限らないが、 κ_0 が通常は $O(1)$ より小さい ($|\kappa_0| |\xi_{\perp 0}| < 1$) ことを考慮すると、全く正当性がないわけではない。この仮定のもと(3.14)は

$$\begin{cases} \kappa_B^* \approx -\nabla_{\perp 0} (\nabla_{\perp 0} \cdot \xi_{\perp 0}) - 2(\nabla_{\perp 0} \xi_{\perp 0}) \cdot \kappa_0 \\ \kappa_C^* \approx (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla)^2 \xi_{\perp 0} + [(\mathbf{b}_0 \cdot \nabla) \xi_{\perp 0}] \cdot (\kappa_0 \mathbf{b}_0 - \nabla \mathbf{b}_0) \end{cases} \quad (3.15)$$

となる。したがって大雑把に言って $|\kappa_B^*|$ は $\|\nabla_{\perp 0} \xi_{\perp 0}\| \propto k_{\perp 0}$ に比例し、一方 $|\kappa_C^*|$ は大雑把に $|(\mathbf{b}_0 \cdot \nabla) \xi_{\perp 0}| \propto k_{\parallel 0}$ に比例する。ここで $k_{\parallel 0}$ と $k_{\perp 0}$ は図 2.1 に示す波数ベクトル \mathbf{k} の 2 成分の大きさで、2 成分は $\mathbf{k}_{\parallel 0} \equiv (\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_0) \mathbf{b}_0$ および $\mathbf{k}_{\perp 0} \equiv (\mathbf{b}_0 \times \mathbf{k}) \times \mathbf{b}_0$ で定義される。ゆえに κ_B^* は主に \mathbf{B}_0 に垂直に伝播するスローモード擾乱によって生成され、一方 κ_C^* は主に \mathbf{B}_0 方向に伝播するスローモード擾乱によって生成される。(3.11)はダイナモは κ_B^* が寄与する部分と κ_C^* が寄与する部分から成るこ

とを示している。以上の考察から、それぞれ $k_{\perp 0}$ が寄与する部分と $k_{\parallel 0}$ が寄与する部分と言い換えることができる。

3.2.1 節で膨張するスローモードダイナモは準定常 ($\frac{\partial}{\partial t} \approx 0$) であることを述べた。スローモードの分散関係式は $k_{\parallel 0} \rightarrow 0$ の極限で $\omega = k_{\parallel 0} C_T$ となる。ここで $C_T \equiv \frac{C_S C_A}{\sqrt{C_S^2 + C_A^2}}$ (C_S は音速, C_A はアルヴェン速度) はチューブ速度またはカスプ速度とよばれている。 C_T は垂直伝播するスローモードの磁力線方向の位相速度であると同時に群速度 (やはり磁力線方向) でもある。このように C_T はスローモードを特徴づける速度である。分散関係式 $\omega = k_{\parallel 0} C_T$ から, $\omega \rightarrow 0$ ($\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$) の極限と $k_{\parallel 0} \rightarrow 0$ の極限は等価である。したがって膨張するスローモードダイナモでは垂直伝播の極限として定常解が存在する。また膨張するスローモードダイナモでは \mathbf{k}_B^* が支配的 ($|\mathbf{k}_B^*| \gg |\mathbf{k}_C^*|$, $k_{\perp 0} \gg k_{\parallel 0}$) である。これに対し, 収縮するスローモードダイナモは非定常 ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$) であることを3.2.2 節で述べた。スローモードの分散関係から $\omega \neq 0$ ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$) と $k_{\parallel 0} \neq 0$ は等価である。したがって収縮するスローモードダイナモでは \mathbf{k}_C^* が不可欠である。以上述べた 2 種のダイナモの特徴は表 3.3 に対照して整理されている。

4 章 ダイナモと沿磁力線電流源の結合

4.1 結合の基本的空間構造

1 章において沿磁力線電流源と(電流系の主要な)ダイナモは一般には独立であると述べた。しかし MHD シミュレーションで得られる region 1 や region 2 では両者が一部空間的に重なっている。これを模式的に示したのが図 4.1 である。図 2.1 と比較対照してみてほしい。図 4.1 において沿磁力線電流源に内在するダイナモは主要ダイナモの一部になっている。沿磁力線電流源とダイナモが重なっていることは、アルヴェンモードとスローモードの結合を意味する。シミュレーションで得られる解は、region 1・region 2 とともに結合がある共通の空間構造パターンで起こることを示している (Watanabe et al., 2019)。ここではシミュレーション結果の詳細ではなく、それを模式的に表したものを示す。

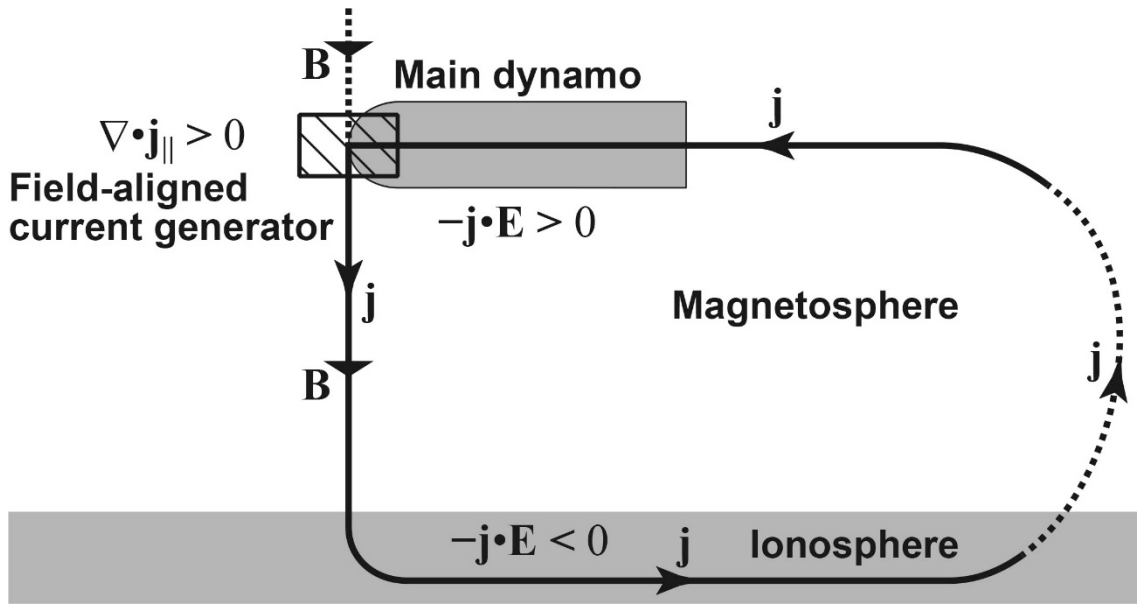


図 4.1 沿磁力線電流源(斜線部分)とダイナモ(磁気圏灰色部分)の結合。図 2.1 と比較してみよ。

図 4.2a は夜側 region 2 の沿磁力線電流源とダイナモを磁気赤道面で図示したものである。真夜中付近のプラズマシート内縁には高圧プラズマが存在し、その周りを反磁性電流 $\mathbf{j}_\perp = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2}$ が流れている(図 4.2a の点線)。この発散(または収束)が沿磁力線電流を作る。沿磁力線電流源は反磁性電流ループの朝側の端と夕側の端にある。背景のポテンシャル磁場 \mathbf{B}_0 はほぼ双極子磁場であり、 κ_0 は両沿磁力線電流源ともほぼ地球方向を向いている。プラズマ圧力勾配 (∇p) は朝側で西向き、夕側で東向きである。したがって式(2.10)から、朝側では電離圏から流出する沿磁力線

電流が生成され ($\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} < 0$), 夕側では電離圏に流入する沿磁力線電流が生成される ($\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} > 0$). この機構はかなり古くから予想されていたものであり, Tanaka et al. (2016) が MHD シミュレーションで確認している. この 2 つの沿磁力線電流源は region 2 電流系のダイナモにもなっている (Tanaka 1995; Tanaka et al., 2016). 垂直流 \mathbf{v}_{\perp} はほぼ方位角方向で, 朝側では東向き, 夕側では西向きである. この \mathbf{v}_{\perp} は ∇p と逆向きで, ダイナモを形成する ($\sigma_m \approx -\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla p > 0$). Tanaka et al. (2016) は, これらのダイナモ領域で $\nabla \cdot \mathbf{v}_{\perp} > 0$ であることを示した. これは夜側 region 2 を維持するダイナモが収縮するスローモードであることを示唆する. 収縮するスローモードダイナモでは磁場曲率 κ_C^* が卓越することが予想されるが, これも Tanaka et al. (2016) がシミュレーションで示している.

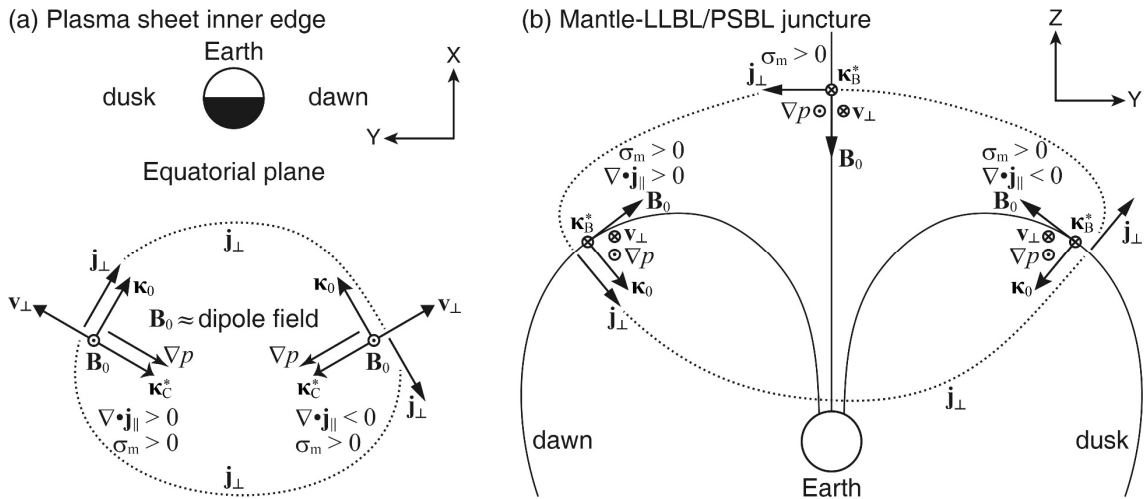


図 4.2 沿磁力線電流源とダイナモの結合を表す模式図. (a)は夜側 region 2 を生成する空間構造を赤道面で表したもの. (b)朝側・夕側 region 1 を生成する空間構造を太陽から尾部方向に眺めたもの.

ほぼ同様の空間構造が region 1 にもみられる. 図 4.2b は朝方・夕方に現れる region 1 の沿磁力線電流源とダイナモを図示したもので, 太陽から磁気圏尾部方向に眺めている. カスプには高圧プラズマが存在し後方のプラズママントルまで伸びている. その高圧プラズマ領域の周りを反磁性電流 $\mathbf{j}_{\perp} = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2}$ が流れている (図 4.2b の点線). この発散 (または収束) が沿磁力線電流を作る.

沿磁力線電流源は反磁性電流ループの朝側の端と夕側の端にあり, そこはマントルと低緯度境界層またはプラズマシート境界層が会する領域である. 反磁性電流の後方部分はカスプ後方からマントルに亘る領域で, これら全域がダイナモになっている. 2 つの沿磁力線電流源は広大なダイナモの朝側と夕側の端に位置し, ダイナモと重なっている. 図 4.2b では, \mathbf{B}_0 , \mathbf{v}_{\perp} , κ_0 などの直交関係

を明確に示すため、これらのベクトルの向きはシミュレーションで得られる現実的なものからややずらして描かれている。しかし本質はそのままである。 \mathbf{B}_0 , \mathbf{v}_\perp , $\mathbf{\kappa}_0$ の直交性から、午前側の沿磁力線電流源では $\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel > 0$ となり、午後側の沿磁力線電流源では $\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel < 0$ となり region 1 が生成される。一方、マントルのダイナモは $\nabla \cdot \mathbf{v}_\perp < 0$ であり (Tanaka et al., 2016), 膨張するスロージダイナモで解釈される。したがって磁場強度勾配 $\mathbf{\kappa}_B^*$ が支配的であり、準定常なダイナモである。Siscoe and Sanchez (1987) はスロージモードの「expansion fan」でマントルのモデリングを行った。図 4.2b に示す擾乱 $\mathbf{\kappa}_B^*$, \mathbf{v}_\perp , ∇p は Siscoe and Sanchez (1987) のモデリングと本質的には同じである。Region 1 のダイナモはカスプ後方の領域に朝夕方向に伸びていて、図 4.2b の反磁性電流ループの上部全てがダイナモである。これとは対照的に、図 4.2a の region 2 ダイナモは、反磁性電流ループの朝側と夕側の端に分かれて存在する。

4.2 沿磁力線電流源-ダイナモ結合の解析

図 4.2 に示すように、結合領域の空間構造は以下の共通の特徴を持っている。

- (A) \mathbf{v}_\perp と $\mathbf{\kappa}_0$ が直交する ($\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{\kappa}_0 = 0$) .
- (B) \mathbf{b}_0 は \mathbf{v}_\perp 方向に向きを変えない ($(\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla) \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$) .

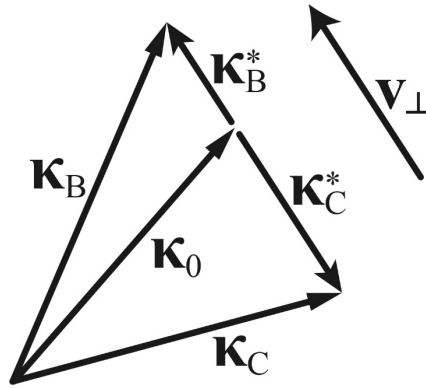


図 4.3 スロージモード擾乱を表すベクトルの関係。

今後の解析では(A)と(B)を仮定する。シミュレーションで得られる現実的な解が(A)と(B)を満たすことは Watanabe et al. (2019) によって確かめられた。(A)と(B)を仮定すると線形化方程式は著しく簡単になる。 $\mathbf{v} \sim O(\varepsilon)$ のとき、 \mathbf{v}_\perp と $\mathbf{v}_{\perp 0}$ の違いは $O(\varepsilon^2)$ である。すなわち線形近似では $\mathbf{v}_{\perp 0}$ を \mathbf{v}_\perp で置き換えることができ、その逆もできる。同様に $\xi_{\perp 0}$ を ξ_\perp で置き換えることができ、その逆もできる。したがって、(3.14)において $\xi_{\perp 0} \cdot \mathbf{\kappa}_0 = 0$, $(\xi_{\perp 0} \cdot \nabla) \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ とおくことができる。(3.14)式は

$$\begin{cases} \mathbf{\kappa}_B^* = -\nabla_{\perp 0} (\nabla_{\perp 0} \cdot \xi_{\perp 0}) + O(\varepsilon^2) \\ \mathbf{\kappa}_C^* = (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla)^2 \xi_{\perp 0} + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (4.1)$$

となり、一様背景磁場中の場合と全く同じ形になる。 $\mathbf{\kappa}_B^*$ と $\mathbf{\kappa}_C^*$ の大きさは

$$\begin{cases} |\mathbf{\kappa}_B^*| \approx k_{\perp 0}^2 \xi_{\perp 0} \\ |\mathbf{\kappa}_C^*| \approx k_{\parallel 0}^2 \xi_{\perp 0} \end{cases} \quad (4.2)$$

と表される。ここでスローモード擾乱の係数を用いる。図 4.3 はスローモード擾乱における $\mathbf{\kappa}_0$, $\mathbf{\kappa}_B$, $\mathbf{\kappa}_C$, $\mathbf{\kappa}_C^*$, \mathbf{v}_{\perp} の関係を示したものである。ここで \mathbf{v}_{\perp} と $\mathbf{\kappa}_0$ の直交性(条件(A))は仮定していない。ダイナモ過程では、 $\mathbf{\kappa}_B^*$ は \mathbf{v}_{\perp} と平行で、 $\mathbf{\kappa}_C^*$ は \mathbf{v}_{\perp} と反平行である。この平行・反平行性はロード過程では逆になる($\mathbf{\kappa}_B^*$ と $\mathbf{\kappa}_C^*$ は常に反平行)。よって(3.11)は簡単化され

$$\sigma_m = \pm \frac{B^2}{\mu_0} v_{\perp} (|\mathbf{\kappa}_B^*| + |\mathbf{\kappa}_C^*|) \quad (4.3)$$

となる。ここで+符号はダイナモ過程で、-符号はロード過程である。(4.2)と(4.3)を用いると、 σ_m の大きさは

$$|\sigma_m| \approx \frac{B^2}{\mu_0} v_{\perp} (k_{\parallel 0}^2 + k_{\perp 0}^2) \xi_{\perp 0} \sim \frac{B^2}{\mu_0} \frac{k^2 v_{\perp}^2}{\omega} \quad (4.4)$$

と見積もることができる。ここで ω はスローモード擾乱の角周波数で、 $v_{\perp} \sim \omega \xi_{\perp 0}$ となる。ここでスローモード擾乱に関し(2.10)式を考える。 $\mathbf{\kappa}_B = \mathbf{\kappa}_0 + \mathbf{\kappa}_B^*$ の関係と $\mathbf{\kappa}_C = \mathbf{\kappa}_0 + \mathbf{\kappa}_C^*$ の係数を用い、さらに $\mathbf{\kappa}_B^*$ と $\mathbf{\kappa}_C^*$ が反平行であることを注意すると、

$$\mathbf{\kappa}_C \times \mathbf{\kappa}_B = \mathbf{\kappa}_0 \times (\mathbf{\kappa}_B^* - \mathbf{\kappa}_C^*) \quad (4.5)$$

と言える。(2.10)に(4.5)を用いると

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} = \frac{2B_0}{\mu_0} (\mathbf{\kappa}_B^* - \mathbf{\kappa}_C^*) \cdot (\mathbf{b}_0 \times \mathbf{\kappa}_0) + O(\varepsilon^2) \quad (4.6)$$

を得る。仮定(A)のもとでは、 $\mathbf{\kappa}_0$ と $\mathbf{\kappa}_B^* - \mathbf{\kappa}_C^*$ は直交する。(4.6)はさらに簡単化されて

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} = \pm \frac{2B_0}{\mu_0} |\mathbf{\kappa}_0| (|\mathbf{\kappa}_B^*| + |\mathbf{\kappa}_C^*|) \quad (4.7)$$

となる。ここで符号は \mathbf{b}_0 , $\mathbf{\kappa}_0$, \mathbf{v}_{\perp} が右手系をなすか(符号+),あるいは左手系をなすか(符号-)に依存する。(4.3)と(4.7)を組み合わせると

$$|\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel}| \approx \frac{2}{B_0} \frac{|\mathbf{\kappa}_0|}{|\mathbf{v}_{\perp}|} |\sigma_m| \quad (4.8)$$

を得る。(4.8)は沿磁力線電流源とダイナモを結ぶ式である。

ヴェン擾乱のものでよい。よって(4.8)式の右辺に現れる σ_m はアルヴェン擾乱からの寄与を含めて考えることができる。電流系の主要ダイナモはスローモード擾乱であるが、ダイナモ領域の端で沿磁力線電流源に内在するアルヴェン擾乱ダイナモと一体化している(図 4.1)。

4.3 実効的沿磁力線電流源：磁力線と電流線の解離

2 章で電離圏から磁気圏へ電流線を追跡すると磁力線と大きくずれることは珍しくないと述べた。例えば, region 1 電流を低緯度境界層起源としたり, サブストーム開始時に赤道面を流れる尾部電流が寸断されて楔型電流系を形成するといった従来のモデルは, MHD シミュレーションの解には現れない。その原因となる磁力線と電流線の解離に関し, 沿磁力線電流源をダイナモとの関係から見直してみよう。図 4.1 に示す電流系は理想化されたものである。電流線は電離圏から磁気圏まで磁力線と平行で, 沿磁力線電流源で直角に曲がりダイナモにつながる。しかし実際にはこのような電流線はない。地球近傍では電流線と磁力線は平行であるが, 高高度において電流線と磁力線は次第にずれてくる。理由は磁気圏には有限のプラズマ圧があり, 有限の反磁性電流 $\mathbf{j}_\perp = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2}$ が存在するためである。これを模式的に示したのが図 4.5a である。電離圏高度で電流線は磁力線 1 と平行であるが, 次第にずれてゆき, ダイナモに到達したときは磁力線 5 の上にある。このような場合, 沿磁力線電流源はどこにあると考えるのが適当であろうか。図 4.5b のように沿磁力線電流と垂直電流に分解して考えてみる。+印が $\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel > 0$ の沿磁力線電流源で, -印が $\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel < 0$ の沿磁力線電流源を表している。簡単のため, 磁場の大きさ B は全領域で一定であるとする。式(2.11)にしたがって, 磁力線に沿って $\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel$ を足し合わせると磁力線 2-5 では $j_\parallel = 0$ となる。磁力線 1 のみ沿磁力線電流源 a での $\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel > 0$ が残り, 有限の $j_\parallel (> 0)$ となる。それでは磁力線 1 の根元で観測される沿磁力線電流の沿磁力線電流源は a であるとしてよいであろうか。数学的にも物理的にも(2.11)は間違いではない。沿磁力線電流が反磁性電流の発散であるとする, その効果は内部では相殺され端にのみ現れる。実際, 図 4.5b で電流線に沿って磁気圏側から $\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel$ を足し合わせていくと, +と-が相殺され, 最後に沿磁力線電流源 a での $\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel > 0$ が残る。磁気圏全体が反磁性電流領域だと考えると, 点 a はその端に当たる。この結果は磁力線に沿って $\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel$ を足し合わせたものと同じである。しかしこの解釈はどうもしっくりこない。電流系の主要なダイナモは明らかに局在している(図 4.5b の灰色部分)。そこで, 今度は逆に電流線に沿って電離圏側から $\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel$ を足し合わせてみる。同様に+と-が相殺され, 最後に磁力線 5 の上にある沿磁力線電流源 c での $\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel > 0$ が残る。それでは沿磁力線電流源 a と沿磁力線電流源 c はどちらが本質的であろうか。電流系の解釈としては, 主要なダイナモとつながっている沿磁力線電流源 c のほうがより本質的であると思われる。

る.したがって,実効的沿磁力線電流源は電離圏で観測される沿磁力線電流とは異なる磁力線上にあると考えたい.これが電流線と磁力線が解離する問題である.しかしながら,電流線に沿って実効的沿磁力線電流源を同定する定量的手法は未だ確立されておらず今後の課題である.

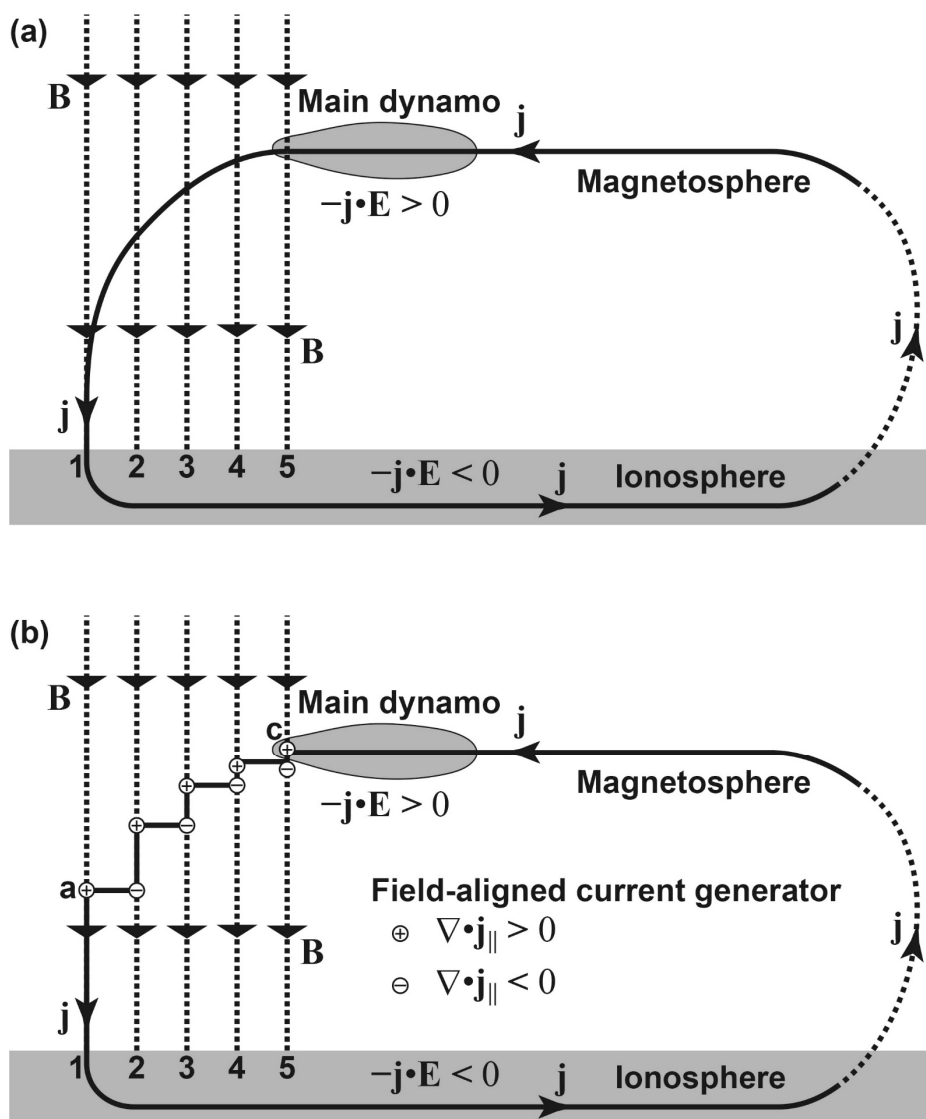


図 4.5 (a)ダイナモに到達するまで電流線と磁力線が一致しない場合の模式図.(b)は電流線を垂直電流と沿磁力線電流に分割して考えた場合の沿磁力線電流源.

第 1 部の引用文献

- Birn, J., & Hesse, M. (2005). Energy release and conversion by reconnection in the magnetotail. *Annales Geophysicae*, 23(10), 3365–3373. <https://doi.org/10.5194/angeo-23-3365-2005>.
- Clauer, C. R. & McPherron, R. L. (1974). Mapping the local time-universal time development of magnetospheric substorms using mid-latitude magnetic observations. *Journal of Geophysical Research*, 79(19), 2811–2820. <https://doi.org/10.1029/JA079i019p02811>.
- Ebihara, Y., & Tanaka, T. (2015). Substorm simulation: Insight into the mechanisms of initial brightening. *Journal of Geophysical Research Space Physics*, 120, 7270–7288. <https://doi.org/10.1002/2015JA021516>.
- Echim, M. M., Roth, M., & de Keyser, J. (2007). Sheared magnetospheric plasma flows and discrete auroral arcs: A quasi-static coupling model. *Annales Geophysicae*, 25(1), 317–330. <https://doi.org/10.5194/angeo-25-317-2007>.
- Echim, M. M., Roth, M., & de Keyser, J. (2008). Ionospheric feedback effects on the quasi-stationary coupling between LLBL and postnoon/evening discrete auroral arcs. *Annales Geophysicae*, 26(4), 913–928. <https://doi.org/10.5194/angeo-26-913-2008>.
- Grad, H. (1964). Some new variational properties of hydromagnetic equilibria. *Physics of Fluids*, 7, 1283–1292. <https://doi.org/10.1063/1.1711373>.
- Haerendel, G. (1990). Field-aligned currents in the Earth's magnetosphere. In C. T. Russell (Ed.), *Physics of Magnetic Flux Ropes*, Geophysical Monograph Series, (Vol. 58, pp. 539–553). Washington DC: American Geophysical Union. <https://doi.org/10.1029/GM058p0539>.
- Hasegawa, A., & Sato, T. (1979). Generation of field-aligned currents during substorm. In S.-I. Akasofu (Ed.), *Dynamics of the magnetosphere*, (pp. 529–542). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company. https://doi.org/10.1007/978-94-009-9519-2_28.
- Heinemann, N. C., Gussenhoven, M. S., Hardy, D. A., Rich, F. J., & Yeh, H.-C. (1989). Electron/ion precipitation differences in relation to Region 2 field-aligned currents. *Journal of Geophysical Research*, 94(A10), 13,593–13,600. <https://doi.org/10.1029/JA094iA10p13593>.
- Janhunen, P., & Koskinen, H. E. J. (1997). The closure of region-1 field-aligned current in MHD simulation. *Geophysical Research Letters*, 24(11), 1419–1422. <https://doi.org/10.1029/97GL01292>.
- Johnson, J. R., & Wing, S. (2015). The dependence of the strength and thickness of field-aligned currents on solar wind and ionospheric parameters. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 120, 3987–4008. <https://doi.org/10.1002/2014JA020312>.
- Le Bellac, M. & Lévy-Leblond, J.-M. (1973). Galilean electromagnetism, *Il Nuovo Cimento*, 14(2), 217–234. <https://doi.org/10.1007/BF02895715>.
- Lotko, W., Sonnerup, B. U. Ö., & Lysak, R. L. (1987). Nonsteady boundary layer flow including ionospheric drag and parallel electric fields. *Journal of Geophysical Research*, 92(A8), 8635–8648. <https://doi.org/10.1029/JA092iA08p08635>.
- Ohtani, S., Miura, A., & Tamao, T. (1989). Coupling between Alfvén and slow magnetosonic waves in an inhomogeneous finite- β plasma: 1. Coupled equations and physical mechanism. *Planetary and Space Science*, 37(5), 567–577. [https://doi.org/10.1016/0032-0633\(89\)90097-4](https://doi.org/10.1016/0032-0633(89)90097-4).
- Sato, T., & Iijima, T. (1979). Primary sources of large-scale Birkeland currents. *Space Science Reviews*, 24, 347–366. <https://doi.org/10.1007/BF00212423>.

- Siscoe, G. L., Crooker, N. U., Erickson, G. M., Sonnerup, B. U. Ö., Siebert, K. D., Weimer, D. R., White, W. W., & Maynard, N. C. (2000). Global geometry of magnetospheric currents inferred from MHD simulations. In S.-I. Ohtani, et al. (Eds.), *Magnetospheric current systems*, Geophysical Monograph Series, (Vol. 118, pp. 41–52). Washington DC: American Geophysical Union. <https://doi.org/10.1029/GM118p0041>.
- Siscoe, G. L., Lotko, W., & Sonnerup, B. U. Ö. (1991). A high-latitude, low-latitude boundary layer model of the convection current system. *Journal of Geophysical Research*, 96(A3), 3487–3495. <https://doi.org/10.1029/90JA02362>.
- Siscoe, G. L., & Sanchez, E. (1987). An MHD model for the complete open magnetotail boundary. *Journal of Geophysical Research*, 92(A7), 7405–7412. <https://doi.org/10.1029/JA092iA07p07405>.
- Song, P., Gombosi, T. I., & Ridley, A. J. (2001). Three-fluid Ohm's law. *Journal of Geophysical Research*, 106(A5), 8149–8156. <https://doi.org/10.1029/2000JA000423>.
- Sonnerup, B. U. Ö. (1980). Theory of the low-latitude boundary layer. *Journal of Geophysical Research*, 85(A5), 2017–2026. <https://doi.org/10.1029/JA085iA05p02017>.
- Southwood, D. J., & Saunders, M. A. (1985). Curvature coupling of slow and Alfvén MHD waves in the magnetotail field configuration. *Planetary and Space Science*, 33(1), 127–134. [https://doi.org/10.1016/0032-0633\(85\)90149-7](https://doi.org/10.1016/0032-0633(85)90149-7).
- Stern, D. P. (1994). The art of mapping the magnetosphere. *Journal of Geophysical Research*, 99(A9), 17,169–17,198. <https://doi.org/10.1029/94JA01239>.
- Tanaka, T. (2003). Formation of magnetospheric plasma population regimes coupled with the dynamo process in the convection system. *Journal of Geophysical Research*, 108(A8), 1315. <https://doi.org/10.1029/2002JA009668>.
- Tanaka, T. (1995). Generation mechanisms for magnetosphere-ionosphere current systems deduced from a three-dimensional MHD simulation of the solar wind-magnetosphere-ionosphere coupling processes. *Journal of Geophysical Research*, 100(A7), 12,057–12,074. <https://doi.org/10.1029/95JA00419>.
- Tanaka, T., Watanabe, M., Den, M., Fujita, S., Ebihara, Y., Kikuchi, T., et al. (2016). Generation of field-aligned current (FAC) and convection through the formation of pressure regimes: Correction for the concept of Dungey's convection. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 121, 8695–8711. <https://doi.org/10.1002/2016JA022822>.
- Vasyliunas, V. M. (1970). Mathematical models of magnetospheric convection and its coupling to the ionosphere. In B. M. McCormac (Ed.), *Particles and Fields in the Magnetosphere*, (pp. 60–71). Norwell, Massachusetts: D. Reidel Publishing Company. https://doi.org/10.1007/978-94-010-3284-1_6.
- Vasyliunas, V. M. (1984). Fundamentals of current description. In T. A. Potemra (Ed.), *Magnetospheric currents*, Geophysical Monograph Series, (Vol. 28, pp. 63–66). Washington DC: American Geophysical Union. <https://doi.org/10.1029/GM028p0063>.
- Vasyliunas, V. M. (2001). Electric field and plasma flow: What drives what? *Geophysical Research Letters*, 28(11), 2177–2180. <https://doi.org/10.1029/2001GL013014>.
- Vasyliunas, V. M. (2005). Relation between magnetic fields and electric currents in plasmas. *Annales Geophysicae*, 23, 2589–2597. <https://doi.org/10.5194/angeo-23-2589-2005>.

- Vasyliunas, V. M., & Song, P. (2005). Meaning of ionospheric Joule heating. *Journal of Geophysical Research*, 110, A02301. <https://doi.org/10.1029/2004JA010615>.
- Walker, A. D. M. (1987). Theory of magnetospheric standing hydromagnetic waves with large azimuthal wave number: 1. Coupled magnetosonic and Alfvén waves. *Journal of Geophysical Research*, 92(A9), 10,039–10,045. <https://doi.org/10.1029/JA092iA09p10039>.
- Watanabe, M., Tanaka, T., & Fujita, S. (2019). Magnetospheric dynamo driving large-scale Birkeland currents. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 124, 4249–4265. <https://doi.org/10.1029/2018JA026025>.
- Wing, S., & Johnson, J. R. (2015). Theory and observations of upward field-aligned currents at the magnetopause boundary layer. *Geophysical Research Letters*, 42, 9149–9155. <https://doi.org/10.1002/2015GL065464>.

第 2 部 磁場トポロジーから観る地球磁気圏

「トポロジー」は数学の一分野で、連続変形して重ね合わせることができるものを同一視する幾何学である。ただし本書では幾何学的対象のもつ「具体的状態」の意味で用いている。例えば、閉じた磁力線と開いた磁力線のトポロジーは異なるが、閉じた磁力線であればどんな形状をしていても同じトポロジーである。そのような感じでトポロジーという言葉を使っている。磁気圏磁場のトポロジーは意外と知られていない。例えば、磁気圏磁場と南向き惑星間空間磁場を子午面 (0 時と 12 時を含む面) 内で描き、昼側と夜側で反平行磁場によるリコネクションを説明してある「絵」をよく見かける。しかし現実の磁場トポロジーはそうになっていない。そのような絵は直観的理解を助けるための便法だと理解すべきである。第 2 部では、磁気圏磁場のトポロジーを解説する。トポロジー解析の基本は零点とその結合で、第 5 章と第 6 章をその紹介に当てている。第 7 章では磁気圏の大域的磁場トポロジーを紹介する。この研究の歴史は結構古い (1960 年代から)、グローバル MHD シミュレーションの発展により最近再注目されている。第 8 章では電離圏対流をトポロジーで解釈する方法を紹介する。リコネクションに伴う拡散領域が無限に薄いと仮定して電離圏に投影する方法である。この解釈法は直観的で観測をうまく説明できる反面、プラズマの力学過程が全く含まれていないという欠点がある。第 2 部では、トポロジー (位相幾何) に関連した数学がところどころ現れる。筆者はこれらをちゃんと理解しているわけではなく、厳密な扱いをしていない。もし不備を見つげられた場合は指摘していただけると幸いである。

5 章 零点の局所構造:トポロジー解析の第1ステップ

磁場の零点を原点 \mathbf{O} にとり, 位置ベクトルを \mathbf{r} で表す. 零点近傍での磁場をテイラー展開すると

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} + (\nabla \mathbf{B})_{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{2} (\nabla \nabla \mathbf{B})_{\mathbf{O}} : \mathbf{r} \mathbf{r} + \frac{1}{6} (\nabla \nabla \nabla \mathbf{B})_{\mathbf{O}} : \mathbf{r} \mathbf{r} \mathbf{r} + \dots \quad (5.1)$$

となる. 今, \mathbf{r} の 2 次以上を無視し

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (\nabla \mathbf{B})_{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{r} \quad (5.2)$$

と線形近似する. $(\nabla \mathbf{B})_{\mathbf{O}}$ は原点における磁場勾配テンソルである. ここで $(\nabla \mathbf{B})_{\mathbf{O}} \neq \mathbf{0}$ と仮定した (1 次の零点). 一般には高次 (2 次以上) の零点も存在する. 例えば, $(\nabla \mathbf{B})_{\mathbf{O}} = \mathbf{0}$ かつ $(\nabla \nabla \mathbf{B})_{\mathbf{O}} \neq \mathbf{0}$ であれば 2 次の零点である. しかし高次の零点は一般に不安定で, 擾乱を与えると分岐して零点は消滅するか 1 次の零点に分かれてしまう (Priest et al., 1996). したがって実用上は 1 次の零点のみを考えておけばよい. 以下添字の \mathbf{O} を省略する.

5.1 ポテンシャル磁場が作る零点

ポテンシャル磁場とは (局所的な) 電流を伴わない磁場のことで, スカラーポテンシャル Ψ を用いて $\mathbf{B} = -\nabla \Psi$ と表すことができる. 電流が流れていなければ $(\nabla \mathbf{B})^T = \nabla \mathbf{B}$ (対称テンソル) なので, $\nabla \mathbf{B}$ を対角化することができる. $\nabla \mathbf{B}$ の固有値を $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, 対応する長さ 1 の固有ベクトルを $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ とする. 固有値は全て実数で固有ベクトルはお互いに直交する. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ が基底となる座標系に移れば, $\nabla \mathbf{B}$ の成分表示 ($(\nabla \mathbf{B})'$ で表す) は対角成分のみになる. すなわち $\mathbf{P} \equiv (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3)$ を用いて

$$(\nabla \mathbf{B})' \equiv \mathbf{P}^{-1} \cdot (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

と対角化される. したがって最初からこの対角化された座標系で考察することにする. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の制約から $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 0$ が成り立つ. 3 個の固有値のうち, 2 個が同符号で残りの 1 個が最初の 2 個とは異なる符号をもつ. したがって一般性を失うことなく, κ_1 と κ_2 が同符号であると仮定できる. ベクトル場 \mathbf{B} の磁力線は, 磁力線の向きを考えなければ, κ_1 でスケーリングを行い, $\hat{\mathbf{B}} \equiv \mathbf{B} / \kappa_1$ なるベクトル場の流線を考えても同じである. したがって無次元化された磁場勾配テンソル

$$\nabla \hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{\kappa_1} \nabla \mathbf{B} = \frac{1}{\kappa_1} \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\kappa_1 + \kappa_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -(a+1) \end{pmatrix} \equiv \underline{\underline{\mathbf{M}}} \quad (5.4)$$

の固有値・固有ベクトルを考察すればよい。ここで $a \equiv \kappa_2 / \kappa_1 > 0$ とおいた。 $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と書く ($\kappa_1 = \kappa_1 \lambda_1, \kappa_1 = \kappa_1 \lambda_1, \kappa_1 = \kappa_1 \lambda_1$ の関係がある)。今の場合 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = a, \lambda_3 = -(a+1)$ である。対応する固有ベクトルは変わらず $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ である。ここで $|\lambda_3| > \lambda_1, \lambda_2 > 0$ であることに注意しよう。すなわち \mathbf{x}_3 方向の固有値が最も大きい。 t を仮想時間 (パラメータ) として零点近傍の磁力線を $\mathbf{r}(t) = (x(t) \ y(t) \ z(t))^T$ で表現すると、磁力線の方程式は

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{B}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{r}(t) \quad (5.5)$$

これより

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \exp(\underline{\underline{\mathbf{M}}}t) = \begin{pmatrix} Ae^{\lambda_1 t} \\ Be^{\lambda_2 t} \\ Ce^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} \equiv \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \text{ (定対角行列)} \quad (5.6)$$

と表される。したがって

$$\mathbf{r}(t) = Ae^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + Be^{\lambda_2 t} \mathbf{x}_2 + Ce^{\lambda_3 t} \mathbf{x}_3 \quad (5.7)$$

となる。

(5.7) で t を大きくすることは磁力線を $\hat{\mathbf{B}}$ 方向に追跡することを意味し、 t を小さくすることは磁力線を $-\hat{\mathbf{B}}$ 方向に追跡することを意味する。

$$\mathbf{r}(-\infty) \rightarrow Ce^{\lambda_3 t} \mathbf{x}_3 \quad (5.8)$$

より、零点に向かう磁力線を逆追跡すると次第に \mathbf{x}_3 軸に平行になる。ただし(5.7)は零点近傍の近似式なので、零点から遠いところでは(5.8)は意味をなさない。零点近傍に限ると、 \mathbf{x}_3 軸上の点は

$$\mathbf{r}(t) = Ce^{\lambda_3 t} \mathbf{x}_3 \quad (5.9)$$

に従い、無限大の時間をかけて零点に収束していく。一般に、位相空間で、ある固定点に収束する点全体の集合を安定多様体と呼ぶ。多様体とは、大雑把に言えば、局所的ユークリッド空間をつなぎ合わせた図形のことである。今の場合、零点近傍で \mathbf{x}_3 軸は3次元位相空間における1次元安定多様体とみなすことができる。一方

$$\mathbf{r}(+\infty) \rightarrow Ae^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + Be^{\lambda_2 t} \mathbf{x}_2 \quad (5.10)$$

より、零点から離れていく磁力線を追跡すると次第に xy 面に平行になる。ただし(5.8)と同じ理由で、

零点から遠いところでは(5.10)は意味をなさない。零点近傍に限ると、 \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 が張る面上の点は

$$\mathbf{r}(t) = Ae^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + Be^{\lambda_2 t} \mathbf{x}_2 \quad (5.11)$$

に従い、無限大の時間をかけて零点から発散していく。一般に、位相空間で、ある固定点から発散する点全体の集合を不安定多様体と呼ぶ。今の場合、零点近傍で \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 が張る面は 3 次元位相空間における 2 次元不安定多様体とみなすことができる。安定多様体・不安定多様体は流線トポロジーの境界に相当し、安定多様体・不安定多様体上にはない流線は、零点近傍でその向きが急激に変化する。

以上の議論では、 $M_{11} = 1$ とおいた（自由度を減らした）ことで、実際には $\kappa_1 > 0$ の場合のみを考えている。 $\kappa_1 < 0$ の場合は磁力線の向きが全く逆になるが、上の議論はそのまま使える。ただし $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の符号は逆になり、流線の収束・発散および多様体の安定・不安定も逆になる。

磁力線の形を具体的に求めてみよう。 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 方向にそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸をとる。

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{B}$ から t を消去した $\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$ に $\hat{\mathbf{B}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{r}$ を用いると、 xy 面内, xz 面内, yz 面内に

おける磁力線の形は

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} = a \frac{y}{x} & a > 0 \end{cases} \quad (5.12a)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} = \frac{B_x}{B_z} = -b \frac{x}{z} & b \equiv \frac{1}{a+1} \quad 0 \leq b \leq 1 \end{cases} \quad (5.12b)$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dz} = \frac{B_y}{B_z} = -c \frac{y}{z} & c \equiv \frac{a}{a+1} \quad 0 \leq c \leq 1 \end{cases} \quad (5.12c)$$

を解けば得られる。(5.12)の一般解は

$$\begin{cases} y = \alpha x^a & \alpha \text{は定数} \end{cases} \quad (5.13a)$$

$$\begin{cases} xz^b = \beta & \beta \text{は定数} \end{cases} \quad (5.13b)$$

$$\begin{cases} yz^c = \gamma & \gamma \text{は定数} \end{cases} \quad (5.13c)$$

となる。

磁力線の向きは(5.13)からは分からず、 κ_1 の符号をみないといけない。しかし、前述のように $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ は $\kappa_1 > 0$ の場合しか表現できないことは注意を要する。 $a > 1$ を仮定して図示すると図 5.1a のようになる。 xy 面内で磁力線は零点から発散し、 z 軸上で磁力線は零点に収束する。これを正の零点（または B 型零点）と呼ぶ。 $\kappa_1 < 0$ の場合には磁力線の向きが逆になる（図 5.1b）。 xy 面内で磁力線は零点に収束し、 z 軸上で磁力線は零点から発散する。これを負の零点（または A 型零点）と呼ぶ。正の零点、負の零点という言い方は Priest and Titov (1996) による。零点の正負は κ_1 （または

κ_2) の正負と等価であり, \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 が張る面における磁力線の発散 ($\kappa_1 > 0$) あるいは収束 ($\kappa_1 < 0$) に関連づけている. また, 6 章で議論する零点結合において, 零点を結ぶ磁力線の様相が, 零点を負電荷・正電荷とみなしたものと類似している. 一方, A 型, B 型という言い方は Cowley (1973) が用いた記号に由来する. 図 5.1a, 図 5.1b いずれの場合も, 零点近傍の xy 面 (固有ベクトル \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 が張る面) とそれを延長した 2 次元多様体を fan (扇) または Σ 面といい, 零点近傍の z 軸 (固有ベクトル \mathbf{x}_3 が定める線) とそれを延長した 1 次元多様体を spine (脊柱) または γ 線と言う. (「 γ 線」は英語の「 γ line」にならったもの. 日本語の γ 線には別の意味があるが, 本書では紛れはなかろう.) Fan, spine という言い方は Priest and Titov (1996) による. これを日本語で「扇」「脊柱」と言い換えるのは野暮な印象なので, 本書では英語のまま fan, spine と呼ぶことにする. 一方, Σ 面, γ 線という言い方は Lau and Finn (1990) が図中で用いた記号に由来する. 図 5.1 に見られるように, Σ 面 (fan) を境にして, 磁力線のトポロジーが全く異なるっている. Σ 面は磁力線トポロジーが変わる境界でありセパトリックスとも呼ばれる. セパトリックスは零点に集まる磁力線で構成される磁気面である. 一方 γ 線 (spine) も零点に出入りする特異な磁力線である. γ 線もセパトリックスに含める考え方もあるが, 宇宙空間物理学でセパトリックスとは Σ 面のことである.

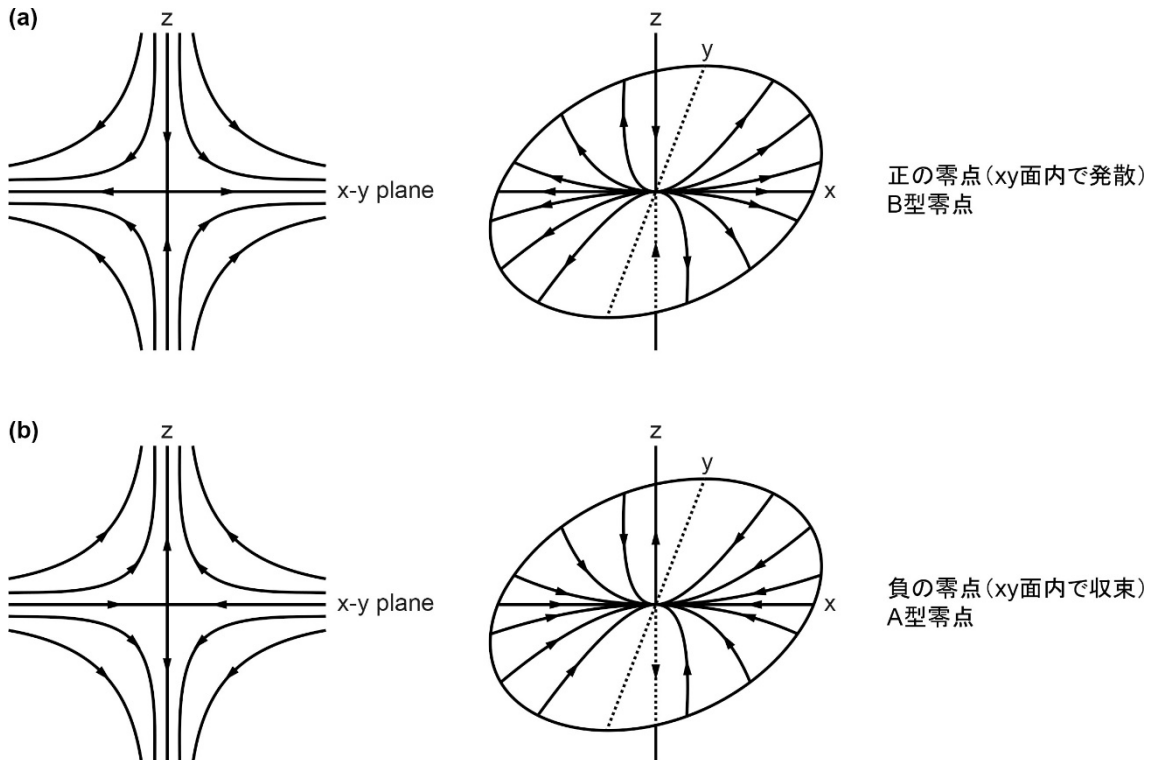


図 5.1 零点近傍の磁場構造.

図 5.1a では $a > 1$ を仮定したが, a は fan 上で磁力線が x 軸に接するか, y 軸に接するかを決

めるパラメータとなる。 $0 < a < 1$ では fan 上の磁力線は y 軸に接しながら発散し (図 5.2a), $a > 1$ では fan 上の磁力線は x 軸に接しながら発散する (図 5.2c)。Fan 上で磁力線が接する軸を主軸と言う。 $a = 1$ は 2 つの固有値が等しい ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) 場合 (固有値の縮退) に相当し, fan 上で磁力線は直線状に発散する (図 2b)。これを正規の (proper) 放射状零点と呼ぶ。これに対し $a \neq 1$ の場合 (図 5.2a および図 5.2c) を非正規の (improper) 放射状零点と呼ぶ。

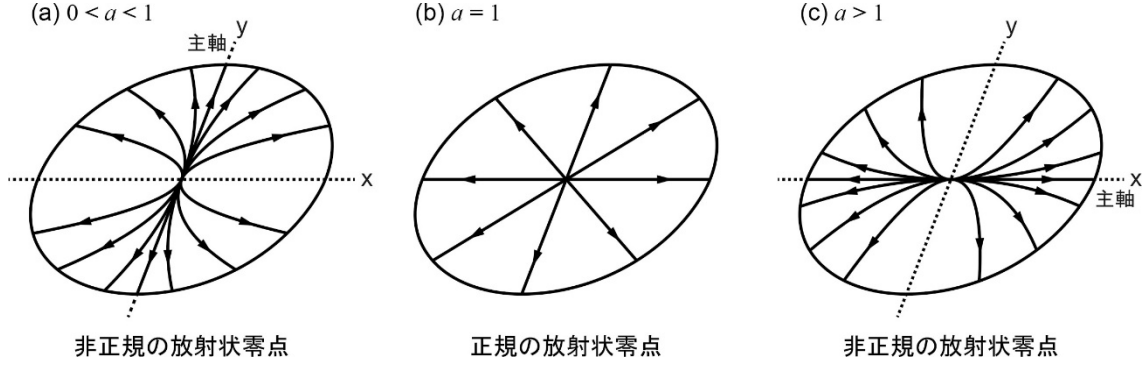


図 5.2 パラメータ a による分類。

5.2 電流がある場合の零点

5.2.1 一般の磁場勾配テンソル

5.1 の結果を電流が存在する場合に拡張する。 $\nabla \mathbf{B}$ は対角和が 0 の実行列である。テンソル $\nabla \mathbf{B}$ を対称部分 $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ と反対称部分 $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ に分けると

$$\nabla \mathbf{B} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \quad (5.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbf{S}}} \equiv \nabla \mathbf{B} + \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \nabla \mathbf{B} \end{array} \right. \quad (5.15a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \equiv -\frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \underline{\underline{\mathbf{I}}} \end{array} \right. \quad (5.15b)$$

となる (2 章の付録 A2.1 (テンソルの規約分解) 参照)。ここで $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ は 2 階の単位テンソルである。対称部分 (5.15a) は deviator 部分 (中辺第 1 項) と scalar 部分 (中辺第 2 項) から成るが、今の場合 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ なので、scalar 部分はない。対称部分はポテンシャル磁場 ($\mathbf{B} = \nabla \Psi$, $\nabla^2 \Psi = 0$) によって作られる。反対称部分 (5.15b) は $\nabla \mathbf{B}$ の vector 部分である。反対称部分は局所的電流 ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$) によって作られる。

5.1 で議論したように、 $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ の固有値は全て実数で、固有ベクトルは直交する。固有ベクトルの方向を座標軸にとると (spine の方向を z 軸にする)、この座標系 K で $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ は

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\kappa_1 + \kappa_2) \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

と対角化される. κ_1 と κ_2 は同符号の実数である. 一方, 反対称部分 $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ は

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{\mu_0}{2} \begin{pmatrix} 0 & j_z & -j_y \\ -j_z & 0 & j_x \\ j_y & -j_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

と表現できるから, $\nabla \mathbf{B}$ は座標系 K における成分で

$$\nabla \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \frac{\mu_0 j_z}{2} & -\frac{\mu_0 j_y}{2} \\ -\frac{\mu_0 j_z}{2} & \kappa_2 & \frac{\mu_0 j_x}{2} \\ \frac{\mu_0 j_y}{2} & -\frac{\mu_0 j_x}{2} & -(\kappa_1 + \kappa_2) \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

と表される. $\nabla \mathbf{B}$ の固有値 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ のうち, 1 つは必ず実数で, しかも他の 2 つの固有値の実部とは符号が異なっている. 今この固有値を ω_3 とし, 対応する実固有ベクトルを \mathbf{x}_3 とする (規格化しておく). \mathbf{x}_3 が spine に対応する方向である. 電流 \mathbf{j} を spine 方向の成分 \mathbf{j}_{\parallel} と spine に垂直な成分 \mathbf{j}_{\perp} に分解する. 今, 単位ベクトル \mathbf{x}_2 を \mathbf{j}_{\perp} の方向にとり, さらに単位ベクトル \mathbf{x}_1 を $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ が固有正規直交座標系をなすように定める. 回転行列 $\underline{\underline{\mathbf{P}}} = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3)$ を作り座標変換すると, 新しい座標系 K' では $(\nabla \mathbf{B})'$ の xz 成分と yz 成分が 0 になる (行列三角化手続きの第一段階と同じで, 上半分のうち, まず第 3 列が 0 になる). さらに, K' 系では $j_y = 0$ となることに注意すると, 結局

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}' = \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{S}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \begin{pmatrix} p & \frac{u}{2} & 0 \\ \frac{u}{2} & q & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & -(p+q) \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}' = \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu_0 j_z}{2} & 0 \\ -\frac{\mu_0 j_z}{2} & 0 & \frac{\mu_0 j_x}{2} \\ 0 & -\frac{\mu_0 j_x}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

$$(\nabla \mathbf{B})' = \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} (\nabla \mathbf{B}) \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \begin{pmatrix} p & \frac{u + \mu_0 j_z}{2} & 0 \\ \frac{u - \mu_0 j_z}{2} & q & 0 \\ 0 & -\mu_0 j_x & -(p+q) \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

の形になる. ここで p, q, t, u は座標系 K' における 0 でない対称成分である. 非対角成分 t と u は K' 系における成分表示で

$$\begin{cases} t \equiv \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} \end{cases} \quad (5.22a)$$

$$\begin{cases} u \equiv \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{cases} \quad (5.22b)$$

と与えられる. また K' 系では

$$t + \mu_0 j_x = 0 \quad (5.23)$$

となることにも注意しよう. 回転行列 $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ は, そのような座標系への座標変換を表す. 一方, 対角成分 p, q は, 座標変換 $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ で κ_1, κ_2 と関係づけられている. $\omega_3 = -(p+q)$ は spine 方向の固有値を表す. トポロジーのみを考察するのであれば, (5.21) で $p+q \geq 0$ を仮定して一般性を失わない. この仮定は, 正の零点 (B 型零点) のみを考察することを意味する. さらに, $p=q=0$ の場合を考察することは意味がないから, p, q どちらか一方は 0 でないと仮定してよい. 今, $p \neq 0$ を仮定して, p で $(\nabla \mathbf{B})'$ のスケーリングを行う.

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} \equiv \frac{1}{p} (\nabla \mathbf{B})' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{u + \mu_0 j_z}{2p} & 0 \\ \frac{u - \mu_0 j_z}{2p} & \frac{q}{p} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_0 j_x}{p} & -\left(\frac{q}{p} + 1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s - j_{\parallel}}{2} & 0 \\ \frac{s + j_{\parallel}}{2} & a & 0 \\ 0 & j_{\perp} & -(a+1) \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

ここで, 改めて $s \equiv \frac{u}{p}$, $j_{\parallel} \equiv -\frac{\mu_0 j_z}{p}$, $j_{\perp} \equiv -\frac{\mu_0 j_x}{p}$, $a \equiv \frac{q}{p}$ を導入した. j_{\parallel}, j_{\perp} の定義に負号がつ

いているのは Parnell et al. (後出) の表式に合わせるためで, 本質的なものではない. また添字の \parallel と \perp は spine に平行, 垂直という意味である. 磁力線に平行, 垂直という意味ではない. ただし spine は磁力線でもあるので, あながち誤りでもない. j_{\parallel} や j_{\perp} は符号をもつ量として定義されている.

(5.24) は, ポテンシャル磁場の場合の (5.4) を, 電流が存在する場合に一般化したものである. ただし, (5.24) での a には (5.4) とは異なる制約がある. まず $p+q \geq 0$ を仮定したので $a \geq -1$ である. a は

負の値をとり得る. 次に, $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ の行列式は負 (0 も許せる) でないといけないから, 主小行列

$$[\underline{\underline{\mathbf{M}}}]_{33} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s-j_{\parallel}}{2} \\ \frac{s+j_{\parallel}}{2} & a \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

の行列式は正または 0 でなければならない. すなわち

$$\begin{aligned} \det([\underline{\underline{\mathbf{M}}}]_{33}) &= a - \frac{1}{4}(s+j_{\parallel})(s-j_{\parallel}) \geq 0 \\ \therefore s^2 &\leq j_{\parallel}^2 + 4a \end{aligned} \quad (5.26)$$

の条件が付く.

$\nabla \mathbf{B}$ の一般的な行列表現(5.24)について少し考察してみる. 5.1 節で電流による寄与 (反対称成分) がない場合には, さらに z 軸の回りに回転して非対角成分を 0 とすることができた ((5.4)式). しかし電流が存在する場合には, 一般には(5.24)で $s = 0$ とすることができない. しかし $j_{\perp} = 0$ の場合には, z 軸の回りに回転することによって

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{j_{\parallel}}{2} & 0 \\ \frac{j_{\parallel}}{2} & a & 0 \\ 0 & 0 & -(a+1) \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

の形にすることができる. したがって $j_{\perp} = 0$ の場合には, 自動的に $s = 0$ において自由度を減らすことができる. さらに $j_{\parallel} = 0$ の場合には, (5.27)は(5.4)になる. ところで, 5.1 節では κ_1 と κ_2 は 0 でないと仮定したので $a \neq 0$ ($a > 0$) であった. しかし, どちらか一方 ((5.4)のスケーリングの場合には κ_2) が 0 になることは理論上あり得る. この場合, 詳細は示さないが磁場は完全に 2 次元になる. すなわち零点でなく零線になる. 現実には磁場が 2 次元になることはないが, 今回はより一般的に扱うという意味で, $\kappa_2 = 0$ (すなわち $a = 0$) の場合を含めておく.

無次元化された磁場勾配テンソル(5.24)に基づき, 電流が存在する場合の零点構造は Parnell et al. (1996)によって議論された. 5.1 節の記述と同様に, $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と書く ($\omega_1 = p\lambda_1, \omega_2 = p\lambda_2, \omega_3 = p\lambda_3$ の関係がある). $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ は $\lambda_3 = -(a+1)$ なる固有値をもつ. したがって λ_1, λ_2 は主小行列 $[\underline{\underline{\mathbf{M}}}]_{33}$ ((5.25)式) の特性方程式, すなわち

$$\lambda^2 - (a+1)\lambda + a - \frac{1}{4}(s^2 - j_{\parallel}^2) = 0 \quad (5.28)$$

から求まる. (5.28)の解は

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4 \left[a - \frac{1}{4}(s^2 - j_{\parallel}^2) \right]} \right) \quad (5.29)$$

したがって固有値が複素数になるかどうかは根号内を D (判別式) とおいて

$$D \equiv (a-1)^2 + s^2 - j_{\parallel}^2 \quad (5.30)$$

の符号を調べればよい. $D \geq 0$ であれば λ_1, λ_2 は実数で ($D=0$ なら $\lambda_1 = \lambda_2$), $D < 0$ であれば共役複素数になる. したがって

$$j_c \equiv \sqrt{(a-1)^2 + s^2} \quad (5.31)$$

が臨界となる電流値を与える. $|j_{\parallel}| \leq j_c$ であれば固有値は実数で, $|j_{\parallel}| > j_c$ であれば共役複素数となる. また, いずれの場合でも $|\lambda_3| > \text{Re}(\lambda_1), \text{Re}(\lambda_2) > 0$ となる. すなわち固有値の実部が最も大きいのは spine 方向である. ただし, $a=0$ かつ $s^2 = j_{\parallel}^2$ の場合に限り $|\lambda_3| = \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ となる.

5.2.2 Fan がらせん構造になる場合 ($|j_{\parallel}| > j_c$)

固有値が共役複素数になる場合を考察してみる. (5.7) の形の一般解はこの場合も有効である. ただし λ_1 と λ_2 が共役複素数である. (5.7) の両辺の複素共役をとると (F の複素共役を F^* で表す)

$$\mathbf{r}(t) = A^* e^{\lambda_2^* t} \mathbf{x}_1^* + B^* e^{\lambda_1^* t} \mathbf{x}_2^* + C^* e^{\lambda_3^* t} \mathbf{x}_3^* \quad (5.32)$$

(5.7) と (5.32) を比較すると

$$A^* = B, \quad B^* = A, \quad C^* = C, \quad \mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_2^* = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_3^* = \mathbf{x}_3 \quad (5.33)$$

したがって, A と B は複素共役, C は実数, \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 は複素共役, \mathbf{x}_3 は実数であることがわかる. ゆえに

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_1 \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \\ \mathbf{x}'_2 \equiv \frac{1}{2i}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \end{cases} \quad (5.34)$$

は実ベクトルで, 実空間の新たな座標軸とすることができ. ただし \mathbf{x}'_1 と \mathbf{x}'_2 は必ずしも直交しないことは注意を要する. (5.34) を \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 について解くと

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{x}'_1 + i\mathbf{x}'_2) \\ \mathbf{x}_2 \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{x}'_1 - i\mathbf{x}'_2) \end{cases} \quad (5.35)$$

となる. また

$$\begin{cases} \eta \equiv \frac{a+1}{2} \\ \nu \equiv \frac{1}{2} \sqrt{j_{\parallel}^2 - j_c^2} \end{cases} \quad (5.36)$$

とおくと

$$\begin{cases} \lambda_1 = \eta + i\nu \\ \lambda_2 = \eta - i\nu \\ \lambda_3 = -2\eta \end{cases} \quad (5.37)$$

となる. さらに

$$\begin{cases} A = G + iH \\ B = G - iH \end{cases} \quad (G, H \text{ は実数}) \quad (5.38)$$

とおける. (5.35), (5.37), (5.38) を (5.7) に代入すると

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} (G + iH) e^{(\eta + i\nu)t} (\mathbf{x}'_1 + i\mathbf{x}'_2) + \frac{1}{2} (G - iH) e^{(\eta - i\nu)t} (\mathbf{x}'_1 - i\mathbf{x}'_2) + C e^{-2\eta t} \quad (5.39)$$

となり, さらに変形すると

$$\mathbf{r}(t) = R e^{\eta t} [\mathbf{x}'_1 \cos(\nu t + \theta) + \mathbf{x}'_2 \sin(\nu t + \theta)] + C e^{-2\eta t} \mathbf{x}_3 \quad (5.40)$$

となる. ここで $R \equiv \sqrt{G^2 + H^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{H}{G}\right)$ は実定数である. $\eta > 0$ であるから

$$\mathbf{r}(-\infty) = C e^{-2\eta t} \mathbf{x}_3 \quad (5.41)$$

となり, 零点に向かう流線は spine (z 軸) に平行である. 一方

$$\mathbf{r}(+\infty) = R e^{\eta t} [\mathbf{x}'_1 \cos(\nu t + \theta) + \mathbf{x}'_2 \sin(\nu t + \theta)] \quad (5.42)$$

であるから, 零点から離れていく流線は fan (\mathbf{x}'_1 と \mathbf{x}'_2 が張る面) に平行でらせん運動をする (図 5.3). ただし \mathbf{x}'_1 と \mathbf{x}'_2 は一般には直交しないので, このらせん運動はかなり複雑である. 5.2.3 節で議論するが, $j_{\perp} \neq 0$ のときは fan と spine が垂直にならない. $j_{\perp} = 0$ のときは fan と spine が垂直 (xy 面が fan) になるが, その場合でも上述のように \mathbf{x}'_1 と \mathbf{x}'_2 は必ずしも直交しない. \mathbf{x}'_1 と \mathbf{x}'_2 が直交するのは, $j_{\perp} = 0$ かつ $a = 1$ の場合に限られる. このときに限り, \mathbf{x}'_1 を x 軸, \mathbf{x}'_2 を y 軸とすることができ. この場合のらせん運動は比較的簡単に表せる. $\eta = 1$, $\nu = |j_{\parallel}|/2$ より

$$\begin{cases} x = R e^t \cos\left(\frac{j_{\parallel}}{2} t + \theta\right) \\ y = R e^t \sin\left(\frac{j_{\parallel}}{2} t + \theta\right) \end{cases} \quad (5.43)$$

の形になる. z 軸からの距離を $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$, 方位角を $\varphi \equiv \frac{j_{\parallel}}{2}t + \theta$ とすると

$$\rho = Re^{\frac{2}{j_{\parallel}}(\varphi - \theta)} \quad (5.44)$$

と対数的らせん構造になる.

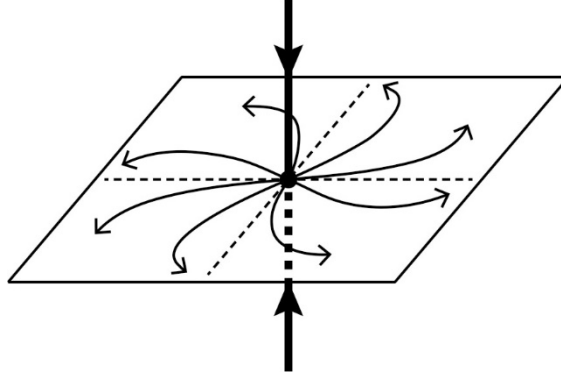


図 5.3 $|j_{\parallel}| > j_c$ で fan がらせん型磁力線になる場合.

5.2.3 Fan が傾く場合 ($j_{\perp} \neq 0$)

一般に $j_{\perp} \neq 0$ であると fan が傾く. 電流が純粋に spine に垂直な場合 ($j_{\parallel} = 0, j_{\perp} \neq 0$) を考察してみよう. 固有値は全て実数で

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(a+1 \pm j_c) \\ \lambda_3 = -(a+1) \end{cases} \quad (5.45)$$

である. 対応する固有ベクトルは少し複雑だが

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-3a^2 + 3 + j_c^2 \pm 2(a+2)j_c}{2j_{\perp}\sqrt{j_c^2 - (a-1)^2}} & \frac{3+3a \pm j_c}{2j_{\perp}} & 1 \end{pmatrix}^T \\ \mathbf{x}_3 = (0 \quad 0 \quad 1)^T \end{cases} \quad (5.46)$$

となる. ただし \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 については正規化をしていない. 固有ベクトルの方向から, fan すなわち \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 が張る面は spine (z 軸) と垂直にならないことがわかる (図 5.4). Fan を表す平面の方程式を求めると

$$2j_{\perp}\sqrt{j_c^2 - (a-1)^2}x - 4j_{\perp}(a+2)y + [9(a+2)^2 - j_c^2]z = 0 \quad (5.47)$$

となる. (5.47) からわかるように, 垂直電流が x 方向であっても, fan は xy 面を x 軸の回りに回転し

たものではない。Fan が xy 面を x 軸の回りに回転したものになるのは、 $a = j_c - 1$ ((5.47)式で x の係数が 0) のときである。ここでは詳細な解析を示さないが、これは 2 次元的な零線が形成される極めて特殊な場合である。また(5.47)から、 $|j_{\perp}| \rightarrow \infty$ の極限では、fan は spine (z 軸) と平行になることもわかる。

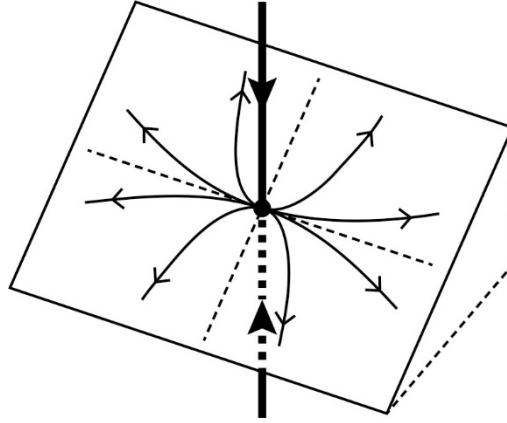


図 5.4 $j_{\perp} \neq 0$ で fan が傾く場合.

5.3 まとめ

構造が 2 次元的になる極めて特殊な場合 (縮退) を除けば、線形近似における零点トポロジー構造は 2 種類しかない。Cowley (1973) に従い A, B という記号を使おう。まずポテンシャル磁場の場合、直交する fan と spine があり、

(A): Spine 上で零点から発散し fan 内では零点に収束する (負の零点)

(B): Spine 上で零点に収束し fan 内では零点から発散する (正の零点)

のいずれかである。次に電流がある場合を考える。Spine に垂直な電流 j_{\perp} があると spine と fan が

直交しなくなるが、トポロジーは不変である。また spine に沿う電流 j_{\parallel} があると、 $|j_{\parallel}| > j_c$ では fan 内

での磁力線はらせんになる。しかしトポロジーはやはり不変である。らせんをほどいてやれば、固有値が実数の場合と同じである。Lau and Finn (1990) は零点の記号に A, A_s, B, B_s を用いた (図 5.5)。

添字 S はらせん (spiral) 構造になる場合である。この記法は fan を表す Σ , spine を表す γ とともに

よく使われる。磁力線は spine 上では零点に向かい (あるいは零点から遠ざかり)、fan 上では零点から遠ざかる (あるいは零点へ向かう)。今、spine 方向の座標を u , fan 上の任意の一方向の座標

を v で表す。磁場成分を (B_u, B_v) とすると、 $B_u = \frac{\partial \psi}{\partial u}$, $B_v = \kappa \frac{\partial \psi}{\partial v}$ ($\kappa > 0$ は定数) のようなスカ

ラー関数 $\psi(u, v)$ が存在して、 ψ は u 方向には極大に (あるいは極小に)、 v 方向には極小に (あるいは極大に) になっている。ゆえに非発散ベクトル場の零点は鞍点である。また、正の零点、負の零

点という言い方は Priest & Titov (1996) によるが, 図 5.5 に見られるように, Σ 面上の磁力線がそれぞれ正の電荷, 負の電荷が作る電気力線に類似していることがわかる.

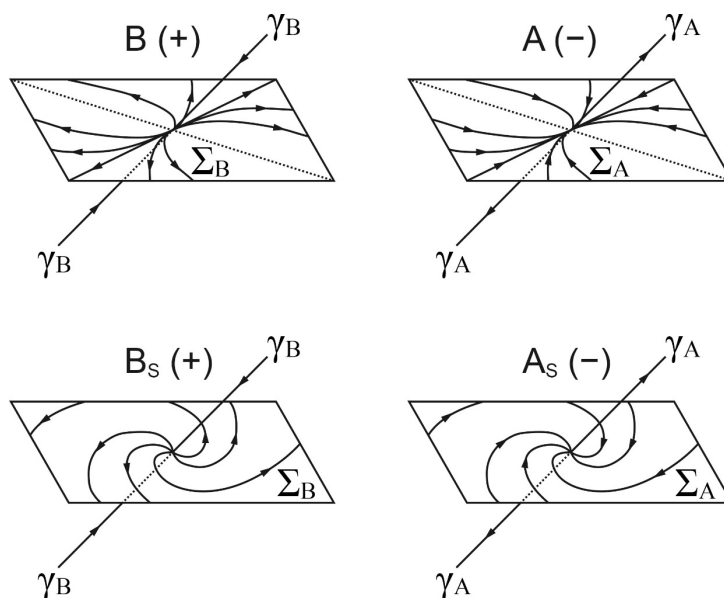


図 5.5 零点構造の4パターン.

最後に, 零点近傍における流線上の運動は無限大の時間がかかる (5.1 節) ことを繰り返しておこう. 本章におけるトポロジーの議論では, 無限大の時間すなわち漸近性を仮定している.

6 章 零点の結合:トポロジー解析の第2ステップ

6.1 大域的トポロジー

5章で零点近傍の磁場トポロジーを求めた.局所的にはspine (γ 線)とfan (Σ 面)で表される.今,零点から遠方へ spine (磁力線)と fan (磁気面)を追跡したとしよう.もし spine または fan の上に別の零点が存在すれば,2つの零点を結ぶ磁力線は2番目の零点の spine または fan にもなっている.また原理的には,ある零点から出た spine (あるいは fan) が同じ零点の fan (あるいは spine) として戻ってくる場合も考えられる.系の全ての零点から spine と fan の追跡を行い,零点 (同一零点の場合を含む) が spine または fan 上に存在するかどうかを判定し,零点間の結合様態を調べれば,系全体の大域的トポロジーが決定される.これに関しては以下に示す数学の定理がある.その定理を述べる前に準備として,「双曲型 (hyperbolic)」という数学用語を導入する.5章で調べたように, $\nabla \mathbf{B}$ の固有値の実部は0ではない.すなわち複素平面を考えたとき,3つの固有値はいずれも虚軸上にない.このように虚軸上にない零点を双曲型特異点という.

[定理]もし系の全ての特異点が双曲型であるとき,系全体のベクトル場トポロジーは特異点と特異点から発する流線・流面により一意に定められる (Arnold, 1992).

すなわち,上で述べた予想は数学的に保証されている.

鞍点結合に関しては,数学を用いない,非常に分かりやすい解説が Abraham & Shaw (1983, 1985)と Abraham et al. (1990)にある.特に直観に訴える図が素晴らしく,本章の執筆に当り大いに参考になっている.

6.2 ヘテロクリニックな鞍点結合

非発散ベクトル場の零点は鞍点なので(5.3 節),零点結合のことを鞍点結合とも呼ぶ.まずある零点の spine または fan が別の零点の spine または fan になっている場合を考えよう.このような結合を,異なる零点の結合という意味でヘテロクリニック (heteroclinic) な鞍点結合と呼ぶ.5章で考察したように,トポロジー的に鞍点はA型 (A_S を含む)とB型 (B_S を含む)の2種類しかない.鞍点結合を考える際に,便宜のため,零点から出ていく磁力線を提供する零点をドナー (donor),零点へ入る磁力線を受容する零点をレセプター (receptor) 呼ぼう.ドナーには spine になる場合 (A型)と fan になる場合 (B型)の2つがある.同様に,レセプターには spine になる場合 (B型)と fan になる場合 (A型)の2つがある.したがって3次元空間におけるヘテロクリニックな鞍点結合は図6.1に示す4通りある.図6.1ではAと A_S をAのスケッチで,Bと B_S をBのスケッチで代表させている.らせん型になると結合の形状は複雑になるが(6.4 節),トポロジーは変わらない.本章では,そして本章に限り,以下のように色を統一する.安定多様体 (γ_B, Σ_A) および安定多様体上の流

線を赤または桃色で表し, 不安定多様体 (γ_A, Σ_B) および不安定多様体上の流線を青または水色で表す.

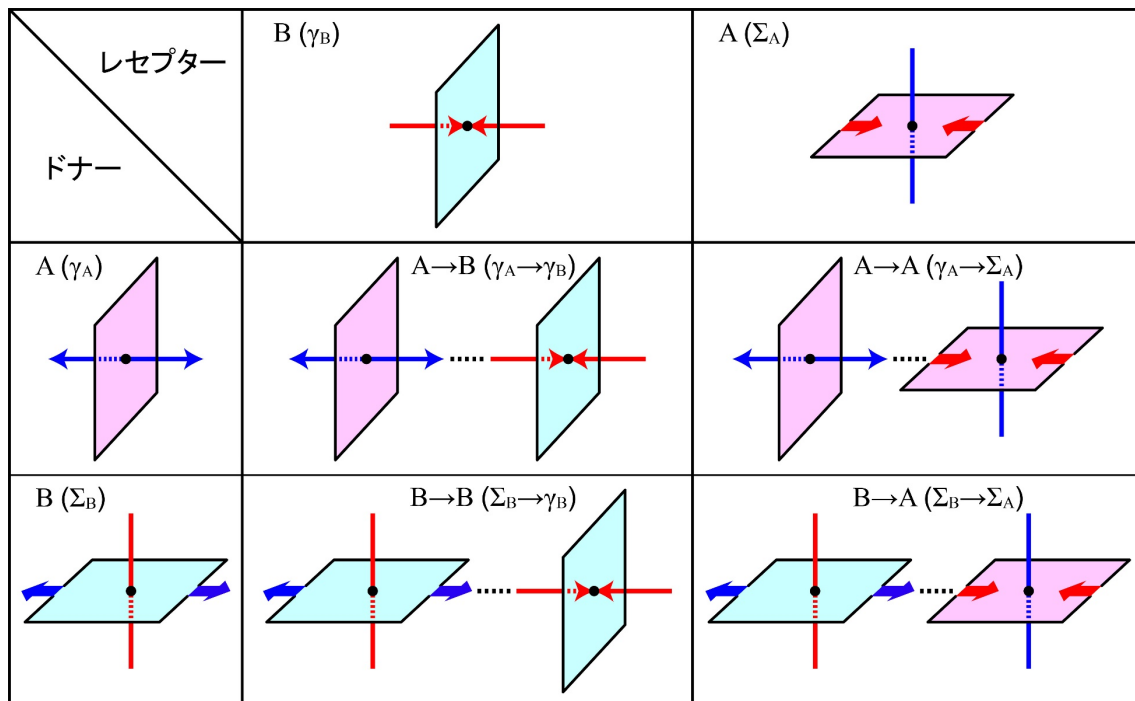


図 6.1 3次元空間におけるヘテロクリニックな鞍点結合.

6.3 ホモクリニックな鞍点結合

今度は零点から出た spine または fan が同じ零点に戻ってくる場合を考えよう. すなわちドナーとレセプターが同じ零点である. このような結合を, 同じ零点の結合という意味でホモクリニック (homoclinic) な鞍点結合と呼ぶ. 3次元空間におけるホモクリニックな鞍点結合は図 6.2 に示す 2通りしかない.

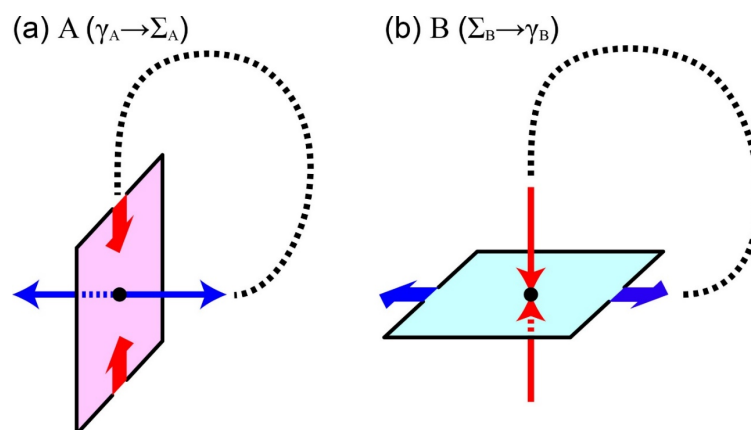


図 6.2 3次元空間におけるホモクリニックな鞍点結合.

ソレノイダル場（非発散ベクトル場）では、零点は必ずペアで生成・消滅する。すなわち零点は縮退した特殊な場合を除けば常に偶数個存在する。したがって 3 次元空間の磁場では、図 6.2 に示すホモクリニックな鞍点結合は起こらないと考えられる。しかし筆者は現時点において、この数学的証明を詰め切れていない。一方、ソレノイダル場という条件を外せば、ホモクリニックな鞍点結合も起こり得るようである。

6.4 横断的鞍点結合

3 次元空間において、理論上は図 6.1 と図 6.2 に示す鞍点結合が考えられる。しかし大域構造として安定な鞍点結合は横断性 (transversality) をもつ結合である。これを横断的結合と呼ぼう。実際シミュレーションで現れる鞍点結合は横断的結合である。横断性とはドナーとレセプターの磁力線が両方とも面（すなわち fan）で互いに交差する場合の状態を言う。3 次元空間で鞍点結合が横断性をもち得るのは、図 6.1 右下の $B \rightarrow A$ 結合しかない。図 6.1 の $B \rightarrow A$ 結合では、ドナーの fan とレセプターの fan が一致するような形状で描かれているが、このように 2 つの fan が接する場合（面的にも線的にも）は横断性をもつとは言えない。鞍点結合が横断性をもつのは、2 つの fan が傾いていて完全に交差する場合である。

図 6.3 は B 型零点から流出する Σ_B と A 型零点へ流入する Σ_A の横断的な結合である。これを「 $B \rightarrow A (\Sigma_B \rightarrow \Sigma_A)$ 」のように表現することにする。2 つの fan が完全に交差していることに注目してほしい。図 6.1 に対応させ、安定多様体上の磁力線を赤で、不安定多様体上の磁力線を青で描いている。もし無限大の時間をかければ、B から伸びる Σ_B (fan) は、A から伸びる γ_A (spine) まで広がることができる。同様に、無限大の時間をかければ、A から伸びる Σ_A は、B から伸びる γ_B まで広がることができる。これまで fan は（ユークリッド空間の）平面として描いていたが、一般に fan は任意の 2 次元多様体、spine は任意の 1 次元多様体でよい（5.1 節）。したがって Σ 面が閉じた曲面になることもある。図 6.3 で Σ_B と Σ_A の交線は B と A を結ぶ磁力線である。一般に、横断的鞍点結合における fan（セパトリックス）の交線をセパレータ (separator) と呼んでいる。セパレータは零点を結ぶ磁力線でもあるので、さらに一般化し、両端が零点である磁力線をセパレータと定義することもある。後者の定義では、図 6.1 の $A \rightarrow B (\gamma_A \rightarrow \gamma_B)$, $A \rightarrow A (\gamma_A \rightarrow \Sigma_A)$, $B \rightarrow B (\gamma_B \rightarrow \Sigma_B)$ のように、spine が零点を結ぶ場合（非横断的鞍点結合）も含まれている。しかし非横断的鞍点結合が可能なのは特殊な場合であり、大域構造としては通常現れない。したがって、実用上は fan の交線がセパレータだと考えておけばよい。本書ではセパレータを橙色で統一して表すことにする。

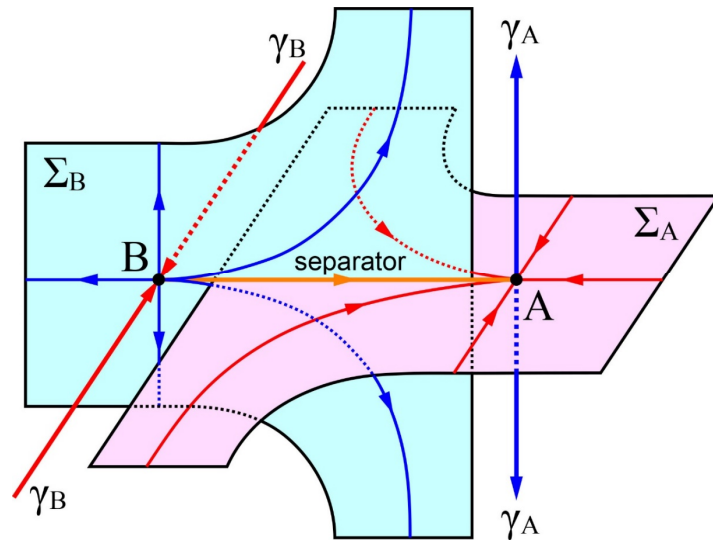


図 6.3 $B \rightarrow A (\Sigma_B \rightarrow \Sigma_A)$ の横断的鞍点結合.

図 6.4 は図 6.3 の B を B_S (らせん型) で置き換えたもの, すなわち $B_S \rightarrow A (\Sigma_B \rightarrow \Sigma_A)$ の結合である. 無限の時間をかければ, 図 6.3 同様に, fan は結合相手の spine まで広がることが可能である. A から出た fan Σ_A は B_S のらせんに沿って B_S の spine まで巻き付く. この部分は図が複雑になるので描いてないが, この様子は次に示す図 6.5 を参照してもらうとわかりやすいと思う. Σ_A は γ_B を軸にして, 巻物状に γ_B に巻き付いていく. Σ_B と Σ_A の交線は B_S と A を結ぶ磁力線で, セパレータである. 形は少し異なるが, らせんをほどいてやれば図 6.3 と同じになる. すなわち図 6.3 と図 6.4 はトポロジ的に同相 (homeomorphic) である. また, 図 6.4 で矢印の向きを逆転すれば, $B \rightarrow A_S (\Sigma_B \rightarrow \Sigma_A)$ 結合の様態を表すことは明らかであろう.

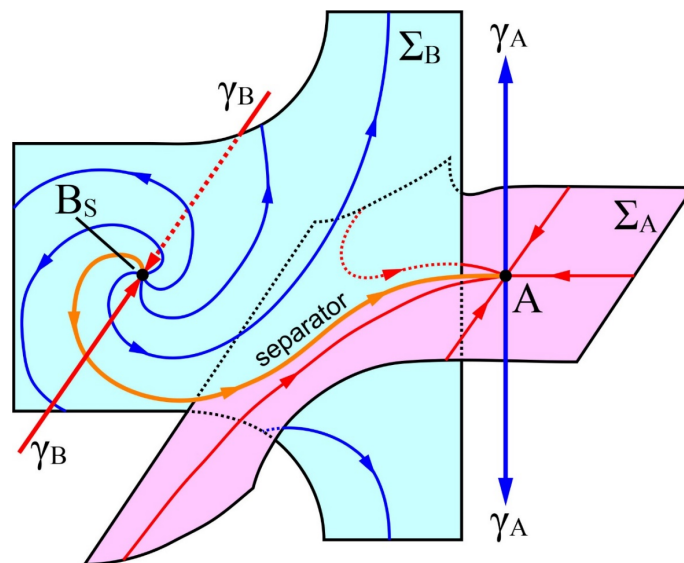


図 6.4 $B_S \rightarrow A (\Sigma_B \rightarrow \Sigma_A)$ の横断的鞍点結合.

図 6.5 は 2 つの零点が両方ともらせん型の結合, すなわち $B_S \rightarrow A_S (\Sigma_B \rightarrow \Sigma_A)$ の場合である. これまで同様に, 無限時間かければ, fan は相手の spine までらせん状に巻き付くことが可能である. Σ_B と Σ_A の交線は B_S と A_S を結ぶ磁力線で, セパレータである. この鞍点結合も形状は複雑であるがトポロジーは図 6.3 および図 6.4 と同じである.

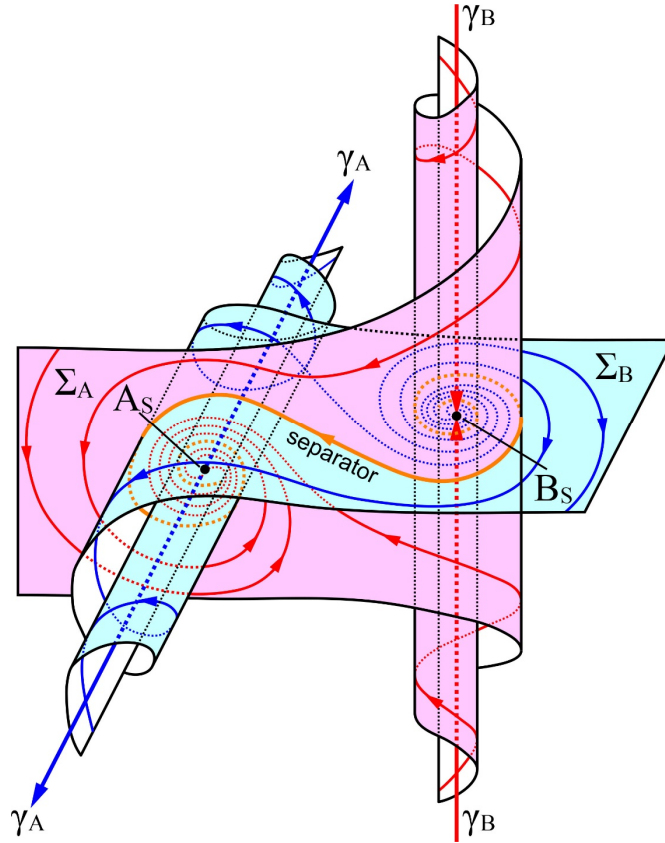


図 6.5 $B_S \rightarrow A_S (\Sigma_B \rightarrow \Sigma_A)$ の横断的鞍点結合.

6.5 シミュレーションで現れる鞍点結合の例: ローレンツアトラクターとのアナロジー

本章の最後に, シミュレーションで現れる, もう少し複雑な鞍点結合の例を紹介しよう. 図 6.6 は B_{S1}, A, B_{S2} の 3 点が, $B_{S1} \rightarrow A (\Sigma_{B1} \rightarrow \Sigma_A), B_{S2} \rightarrow A (\Sigma_{B2} \rightarrow \Sigma_A)$ の 2 つ鞍点結合で結ばれている場合である. Σ_A と Σ_{B1} が, Σ_A と Σ_{B2} がそれぞれ交差しており, この 2 つの結合は横断的である. A から出る 2 つの spine を, 図 6.6 のように γ_A^+, γ_A^- と区別することにする. 同様に, B_{S1} に向かう 2 つの spine を $\gamma_{B1}^+, \gamma_{B1}^-$ と区別し, B_{S2} に向かう 2 つの spine を $\gamma_{B2}^+, \gamma_{B2}^-$ と区別する. 上付き添字の + と - に特段の意味はない. B_{S1} は Σ_A の γ_A^- 側にあり, B_{S2} は Σ_A の γ_A^+ 側にある. また Σ_{B1} 面上の渦と Σ_{B2} 面上の渦は, 巻き方が逆になっていることにも注意しよう.

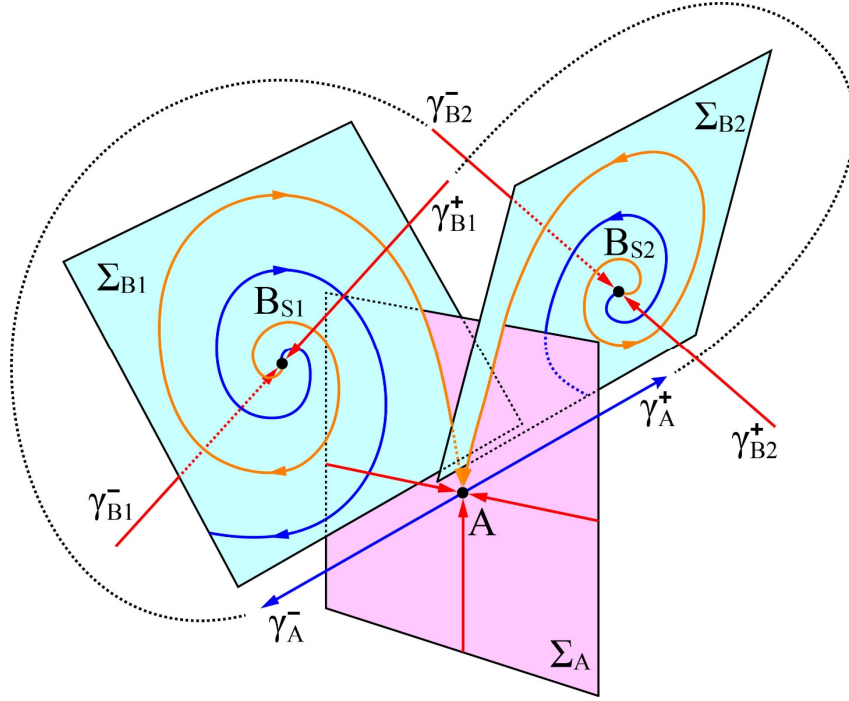


図 6.6 A, B_{S1}, B_{S2} の 3 点による横断的鞍点結合.

2 つの鞍点結合により, Σ_{B1} と Σ_{B2} は直線 $\gamma_A^- - A - \gamma_A^+$ で交わる. このつながり方は図 6.4 における Σ_B と γ_A のつながり方と同じである. まず Σ_{B2} の広がりを考える. A から出た γ_A^+ は図 6.6 の点線の経路で γ_{B1}^+ に近づいてゆく. γ_A^+ は γ_{B1}^+ とともに B_{S1} に近づく. しかし, γ_A^+ と γ_{B1}^+ を一致させること (すなわち $A - \gamma_A^+ - \gamma_{B1}^+ - B_{S1}$ の鞍点結合) は不可能である. ソレノイダル場 (非発散ベクトル場) では, γ_A^+ が B_{S1} に近づいていくとき, 閉軌道に収束することはない (位相空間の運動で言う「リミットサイクル」が存在しない) からである. 図 6.7 は γ_A^+ の B_{S1} への近づき方を表したものである. γ_A^+ は γ_{B1}^+ の周囲に巻き付きながら B_{S1} に近づいていく. その巻き方は Σ_{B1} 上の渦巻きと同じ方向である. B_{S1} に接近するにしたがって, γ_A^+ は次第に γ_{B1}^+ から離れてゆく. Σ_{B1} 近傍では, Σ_{B1} 上の流線 (本節では磁力線という言葉を使わない) と同じような渦巻になる. ただし γ_A^+ が Σ_{B1} を通過することはない. Σ_{B2} は γ_A^+ を含む面なので, Σ_{B2} も図 6.7 のように γ_{B1}^+ に巻き付いてゆく. ただし Σ_{B2} が Σ_{B1} と交差することはない (点 A を除く). このように Σ_{B2} は自分自身と交差することなく 3 次元空間の 2 次元多様体として広がってゆく. Σ_{B2} は表と裏が区別できる多様体である. それを意識し, 図 6.7 では「裏」を白く描いている.

Σ_{B1} の広がりも全く同様である. A から出た γ_A^- は図 6.6 の点線の経路で γ_{B2}^- に近づいてゆく. そして γ_{B2}^- とともに B_{S2} に向かう. ただし γ_A^- と γ_{B2}^- を一致させること (すなわち $A - \gamma_A^- - \gamma_{B2}^- - B_{S2}$ の鞍点結合) は不可能である. 図 6.7 のように, γ_A^- は γ_{B2}^- の周囲に巻き付きながら B_{S2} に近づいていく.

その巻き方は Σ_{B2} 上の渦巻きと同じ方向である.そして B_{S2} に近づくにしたがって, Σ_{B2} 上の渦巻きのように γ_{B2}^- から離れてゆく. Σ_{B1} は γ_A^- を含む面なので, Σ_{B1} も γ_{B2}^- に巻き付いてゆく(図 6.7 では省略してある). γ_A^- が Σ_{B2} に近づいても, γ_A^- や Σ_{B2} が Σ_{B1} と交差することはない(点 A を除く).このように Σ_{B1} は自分自身と交差することなく 3 次元空間の 2 次元多様体として広がってゆく.

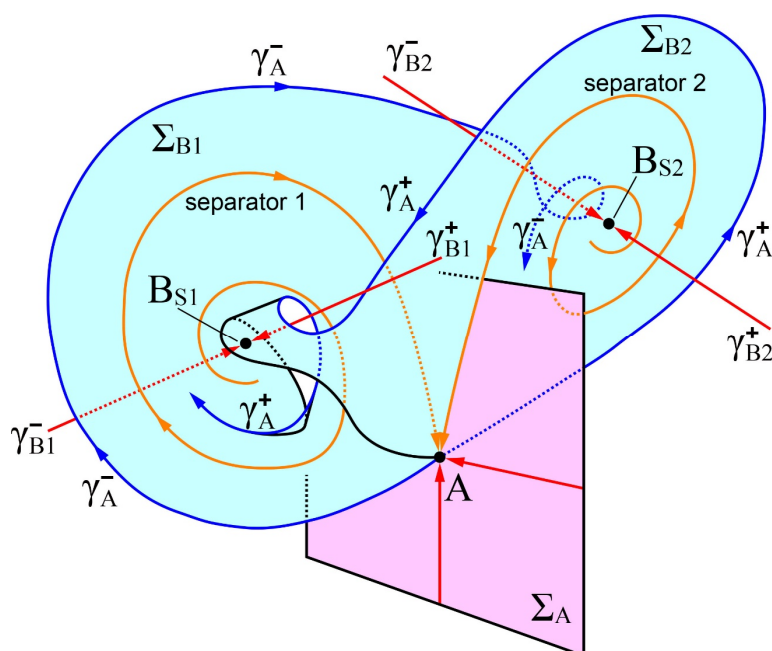


図 6.7 Σ_{B2} 面の広がり.

今度は Σ_A 面の広がりを考えてみよう. Σ_A は Σ_{B1} と交差し,らせんを描きながら γ_{B1} 軸に回巻き付いてく.このときできる Σ_A と Σ_{B1} の交線が図 6.6 および図 6.7 の separator 1 (橙線)である.この様子は図 6.4 の巻きつき方と同じなので,図 6.4 と図 6.6 を見比べながら想像してほしい.ただし, γ_{B1} 軸に巻き付いていった Σ_A 面は,無限大の時間をかけても γ_{B1} 軸に到達できない.なぜなら,図 6.7 からわかるように, Σ_A の巻き込みは中に γ_A^+ を含むからである. γ_A^+ が γ_{B1}^+ に到達できない以上, Σ_A も γ_{B1}^+ に到達できない.一方, Σ_A は Σ_{B2} とも交差し,らせんを描きながら γ_{B2} 軸に回巻き付いていく.この巻き付き方は, Σ_A 面が γ_{B1} 軸に巻き付くのと同じである. Σ_A と Σ_{B2} の交線が図 6.6 および図 6.7 の separator 2 (橙線)である.この Σ_A の巻き込みは中に γ_{B2}^- を含むので,やはり無限大の時間をかけても Σ_A は γ_{B2} 軸に到達できない.

Σ_A 面の γ_{B1} 軸および γ_{B2} 軸への巻き込みは図 6.4 と同じと述べたが,実はもっと複雑である. Σ_A 面の γ_{B1} 軸への巻き込みに対し, γ_A^+ は Σ_A と交わることなく渦の外(Σ_A の外)に出ることが可能である(図 6.7 参照).しかし, γ_A^+ に接続している Σ_{B2} は Σ_A と交わらざるを得ない.この様子を表したのが図 6.8 である.図 6.8 は Σ_A が γ_{B1} 軸の回りに 1 回巻いたときを描いたものである. Σ_A は

再び Σ_{B2} と交差し、図 6.8 で separator 4 (s4 と略記、橙線) と命名したセパレータが現れる。 Σ_A がさらにもう一回 γ_{B1} 軸に巻きつくと、 Σ_A は再び Σ_{B2} と交差する(複雑になるので図 6.8 には描いていない)。この交線もセパレータで、図 6.8 では separator 6 (s6 と略記、橙線) と命名している。このように、 Σ_A 面が γ_{B1} 軸に巻きついてゆくにしたがって、 separator 2 と γ_A^+ の間には、 separator 4, separator 6, separator 8, ... と無数のセパレータが現れる。全く同様に、 Σ_A が γ_{B2} 軸の回りを 1 回巻くと、 Σ_A と Σ_{B1} の交線として図 6.8 の separator 3 (s3 と略記、橙線) が現れる。 Σ_A 面がさらにもう一回巻くと、 separator 5 (s5 と略記、橙線) が現れる。このように、 Σ_A 面が γ_{B2} 軸に巻きついてゆくにしたがって、 separator 1 と γ_A^- の間には、 separator 3, separator 5, separator 7, ... と無数のセパレータが現れる。以上のように、 Σ_A は自分自身と交差することなく、3 次元空間の 2 次元多様体として広がってゆく。 Σ_A も表と裏が区別できる多様体である。図 6.8 では「裏」を白く描いている。

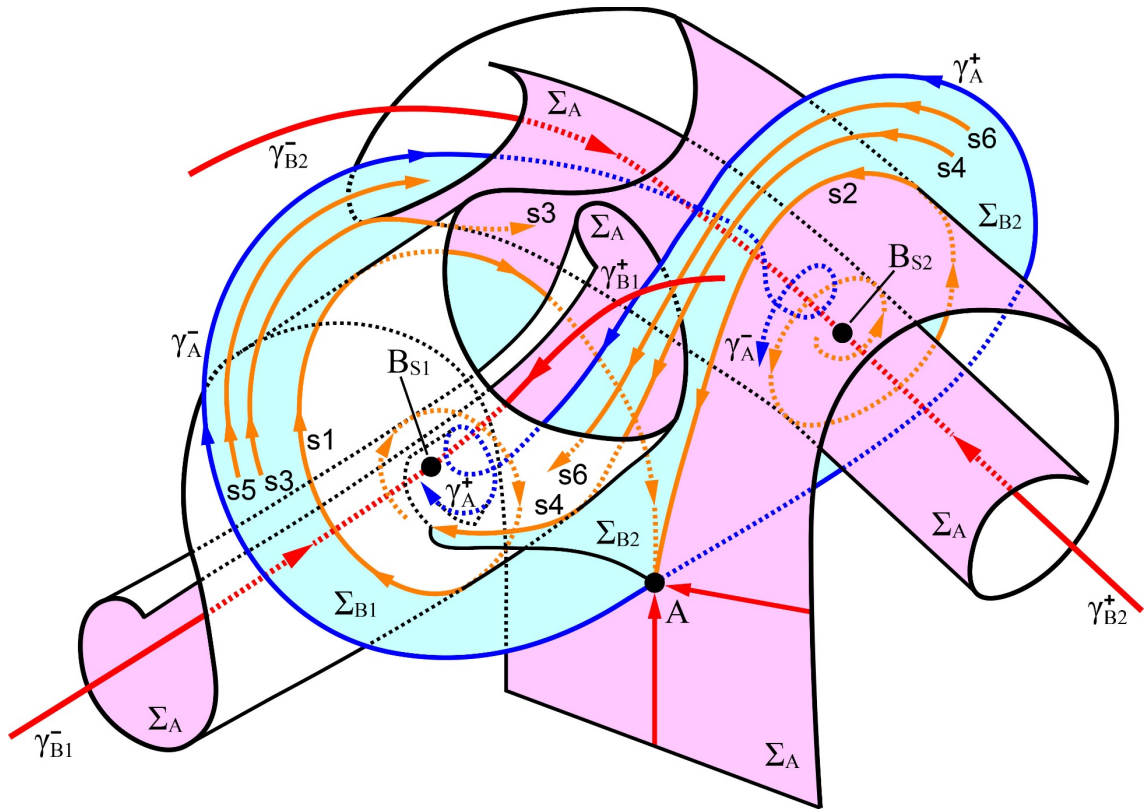


図 6.8 Σ_A 面の広がり。橙線 s1, s2, s3, s4, s5, s6 の s は separator の意味である。

γ_{B1} 軸と γ_{B2} 軸の方向には、流線は零点に向かって収束するので、 Σ_{B1} と Σ_{B2} が無限に離れることはない。実際 Σ_{B1} と Σ_{B2} は近接している。図 6.8 の separator 4, separator 6 で代表される流線は、もともとは B_{S2} 周辺の渦であったものだが、 B_{S1} 周辺の渦になることができる。 Σ_{B1} と Σ_{B2} の間には

有限の隙間があるので、 Σ_{B2} 上の流線が Σ_{B1} 上の流線に移ることは厳密にはない。しかし Σ_{B2} 近傍の流線が Σ_{B1} 近傍の流線に移ることはあり得る。同様に、図 6.8 の separator 3, separator 5 で代表される流線は、もともとは B_{S1} 周辺の渦であったものだが、 B_{S2} 周辺の渦になることができる。したがって Σ_{B1} 近傍の流線が Σ_{B2} 近傍の流線に移ることもあり得る。以上の関係を模式的に表したものが図 6.9 である。 A, B_{S1}, B_{S2} の鞍点結合は非常に複雑であるが、これを簡略化して Σ_{B1} 上と Σ_{B2} 上の運動だけ取り出している。図中の sep1, sep2 はそれぞれ separator 1, separator 2 を表す。黒い流線が前述の Σ_{B1} 上と Σ_{B2} 上を行き来する運動を表している。あるとき Σ_{B1} 上で γ_{B1} 軸の回りをらせん運動していても、突然 Σ_{B2} 上に乗り移り γ_{B2} 軸の回りをらせん運動することが起こり得る。また逆に γ_{B2} 軸回りのらせん運動から γ_{B1} 軸の回りのらせん運動に移ることも起こり得る。このカオス的軌道は、位相空間におけるいわゆる「ローレンツアトラクター」(Lorenz, 1963)と呼ばれている。しかし、磁場は厳密にはローレンツアトラクターにならない。ローレンツ方程式系の流線はソレノイダル場ではなく、リミットサイクルが存在する。一方、磁場にはリミットサイクルが存在せず、リミットサイクル「的」なものに近づくとしか言えない。図 6.10 にローレンツアトラクターの軌道計算例を示す。図 6.9 と比較してみてほしい。図 6.9 の構造はその形状から「ローレンツマスク」と呼ばれている。仮面舞踏会で着用するマスクである。 B_{S1} と B_{S2} の周辺には穴が空いていて、仮面の覗き穴(目の部分)に対応する。ただし、前述のように、ここで紹介したローレンツアトラクター(ローレンツマスク)は流体力学の式を変形したローレンツ方程式の結果であり、数学上の話である。ローレンツアトラクターは理想化された数学モデルであり、プラズマにおける磁場のトポロジー変化とは厳密な数学的意味は異なる。詳細はローレンツの原著論文などを参照されたい。

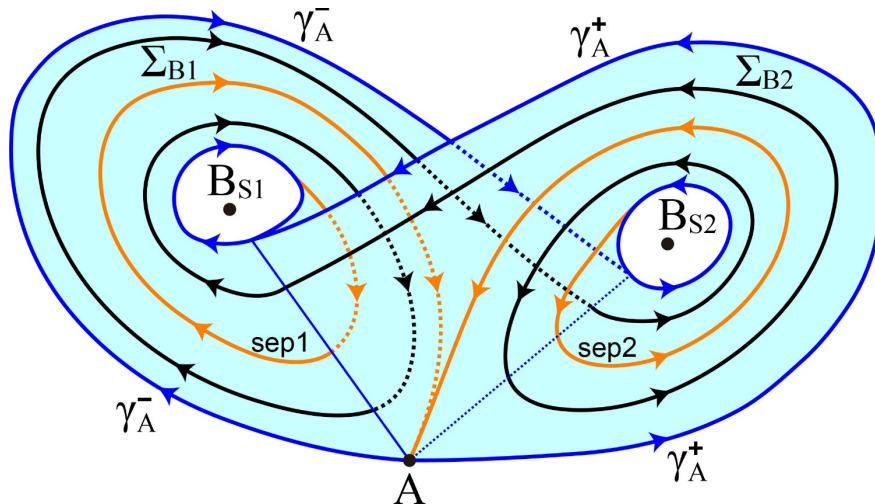


図 6.9 ローレンツマスク。記号 sep1, sep2 の sep は separator の意味である。

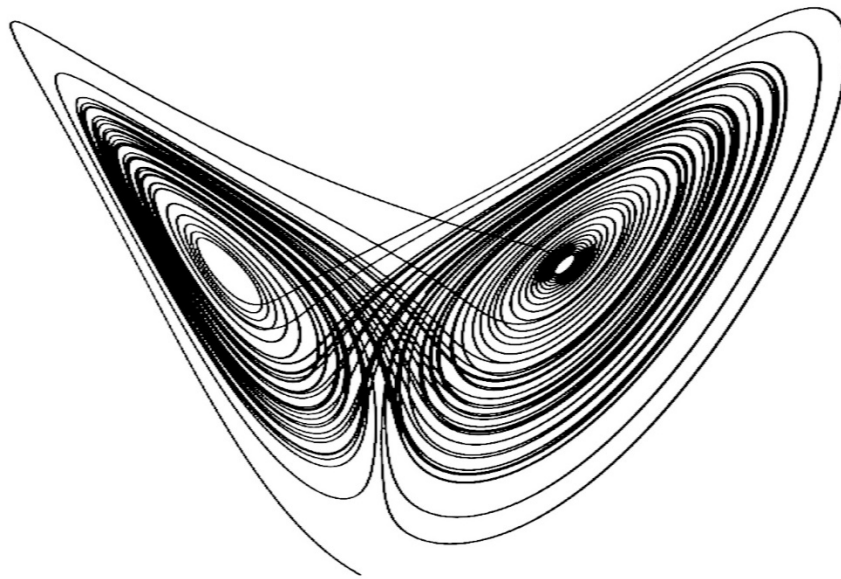


図 6.10 ローレンツアトラクターの軌道計算例.

$B_{S1}-A-B_{S2}$ に類似した鞍点結合図 (図 6.8) は比較的起こりやすいようである. Cai et al. (2006) は磁気圏尾部におけるリコネクションのシミュレーションで, B_S-A_S の鞍点結合 (図 6.5) とともに $B_{S1}-A-B_{S2}$ の鞍点結合が存在することを報告している. 図 6.10 と類似の結合が得られているが, 数学的な意味のローレンツアトラクターになっているということではない. ローレンツアトラクターは, ローレンツ方程式において, 漸近不安定にレイリー数を変化させることにより得られたカオス状態である. 数学的には無限時間をかけ制御パラメータであるレイリー数を変化させ, アトラクターを得る. 一般的に物理シミュレーションでは, Alfvén transient time より長い時間で類似の状態が得られる. 物理では, この Alfvén transient time より長い時間で得られた状態で, トポロジーの変化や分岐現象を数学とほぼ同一の現象として議論する. すなわち, Alfvén transient time より長い時間かけて起こるリコネクションも, トポロジーの変化として捉えれば, 分岐理論を用い議論することが可能である. ローレンツアトラクターは漸近不安定であり, この構造は崩れることが知られている.

(謝辞) 本節は筑波大学の蔡東生氏に校閲をしていただき, いくつかの誤りを指摘していただきました. 蔡氏に感謝いたします. もしなお誤りがあるとすれば, それは筆者の責任です.

7 章 磁気圏の大域的磁場トポロジー

7.1 2-零点, 2-セパレータ構造: 双極子磁場と一様磁場の重ね合わせ

地球磁気圏全体の大域的磁場トポロジーを考えよう. 基本は双極子磁場と一様磁場を重ね合わせたときに出来る, 零点 2 個, セパレータ 2 個の構造である. 磁気圏磁場を双極子磁場 (地球の固有磁場) と一様磁場 (惑星間空間磁場, IMF) の重ね合わせで表現する試みは Dungey (1963) が最初と思われる. 双極子磁場も一様磁場もポテンシャル磁場であり局所的電流を伴わないので, 簡単のためこれを「真空モデル」と呼ぼう. 真空モデルの正確な扱いは, Cowley (1973), Yeh (1976) によってなされた. その後真空モデルを用いた研究がいくつか続いたが, 1980 年代でほぼ終息した. 理由は今日のように計算機が発達しておらず, 手計算で出来ることは限られていたからである. また真空モデルはプラズマ力学を全く考慮していないので, 複雑な様相をみせる磁気圏プラズマが, 真空モデルのようなごく簡単なモデルで表現できるはずがないという思い込みがあったかもしれない. 真空モデルが復活したのは 2000 年代初頭である. 計算機が発達し, グローバル磁気流体シミュレーションで地球磁気圏を再現できるようになった. その結果わかったことは, ある意味驚くべきことだが, 計算機で再現される地球磁気圏の磁場トポロジーは本質的に真空モデルと同じだということである. しかし考え直してみると, これは当然かもしれない. 5.2 節で電流が存在する場合の零点構造を議論したが, 電流があっても零点の基本構造は壊れない. したがって真空モデルにプラズマを取り入れたとしても, 真空モデルの基本構造は維持されることが予想される. いずれにせよ真空モデルは磁気圏磁場トポロジーを考える際の基本となるので, まずこれを考察する.

座標系の原点においた磁気双極子が作る磁場 \mathbf{B}_G と一様磁場 \mathbf{B}_I を真空中で重ね合わせる. 電流はどこにも流れていない (もちろん, \mathbf{B}_G を作る原点の電流と \mathbf{B}_I を作る無限遠の電流は除く). 地球磁場は (r, θ, φ) の極座標系で

$$\mathbf{B}_G = B_0 a^3 \frac{-2 \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta}{r^3} \quad (7.1)$$

と表せる. ここで a は地球半径, B_0 は地表赤道面における磁場の大きさである. 一様磁場 \mathbf{B}_I は, GSM 座標系で yz 面 (卯酉面, 節末の注参照) 内にあり, その y 成分は負 (朝方向き) であると仮定する. すなわち

$$\mathbf{B}_I = B_I [-\sin \theta_I \mathbf{e}_y + \cos \theta_I \mathbf{e}_z] \quad (7.2)$$

で与えられる. ここで B_I は一様磁場の大きさ, θ_I は一様磁場の余緯度である. \mathbf{B}_I を極座標系で表すと

$$\mathbf{B}_1 = B_1 \left[(\cos \theta_1 \cos \theta - \sin \theta_1 \sin \theta \sin \varphi) \mathbf{e}_r - (\cos \theta_1 \sin \theta + \sin \theta_1 \cos \theta \sin \varphi) \mathbf{e}_\theta - \sin \theta_1 \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \right] \quad (7.3)$$

となる. 全磁場 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_G + \mathbf{B}_1$ は卯酉面に関して対称である. また卯酉面内では \mathbf{B} は φ 成分を持たず, 磁力線は卯酉面内にある. 卯酉面内では, (7.3) で $\varphi = \pm 90^\circ$ とおいて

$$\mathbf{B}_1 = B_1 \left[\cos(\theta \pm \theta_1) \mathbf{e}_r - \sin(\theta \pm \theta_1) \mathbf{e}_\theta \right] \quad (7.4)$$

と表せる. 複合は上が $y > 0$ (夕方側) で, 下が $y < 0$ (朝方側) である.

例として, \mathbf{B}_1 が双極子軸に垂直な場合 ($\theta_1 = 90^\circ$) を考える. 卯酉面内の磁力線を描くと図 7.1 のようになる. 後出の磁力線方程式(7.11)とやはり後出のスケーリング(7.7)を用いている. 図 7.1 の点 M (北半球) と N (南半球) が零点である. M は 5 章で述べた A 型 (負の) 零点, N は B 型 (正の) 零点である. 零点における固有ベクトルのうち, 5 章と同様に $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ が Σ 面を決め, \mathbf{x}_3 が γ 線を決めるものとする. \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_3 が卯酉面内にあるが, 残りの \mathbf{x}_2 は卯酉面に直交する方向にある. 対称性から, 図 7.1 のように零点 M も零点 N も固有ベクトルは共通の $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ となる. M から \mathbf{x}_3

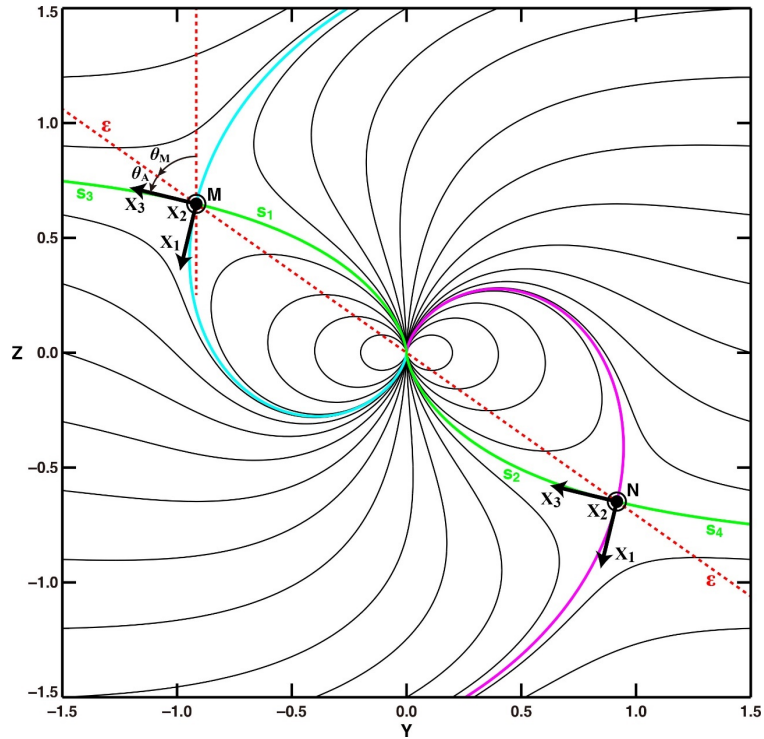


図 7.1 双極子磁場と双極子軸に垂直な一様磁場 (卯酉面内にある) の重ね合わせを双極子磁場と一様磁場を含む面 (卯酉面) 内でみたもの.

方向に湧き出す γ 線は卯酉面内にあり, 図 7.1 では緑色に塗ってある. また, 便宜上, 図 7.1 のように γ 線に s_1, s_3 と名前をつける. 同様に N から x_3 方向に収束する γ 線も卯酉面内にあり, これらも s_2, s_4 と名前をつけ緑色に塗ってある. 零点と電離圏を結ぶ s_1 と s_2 は特に stemline と呼ばれている (Siscoe et al., 2001a). 今後出てくる図では γ 線を緑色で表し, 記号の核文字には統一的に s を使用する. また図 7.1 で M の Σ 面は水色で, N の Σ 面は紫色で描いてある. 卯酉面内ではいずれも x_1 方向に出入りする磁力線である. 今後この Σ 面の色も統一的に用いる.

θ_1 が一般の場合の, 北半球の零点 M の位置を求めてみよう. M の位置が極座標で $(r, \theta) = (R, \theta_M)$ だとすると, (7.4) から (複合は下段を適用)

$$\begin{cases} r\text{成分} & B_1 \cos(\theta_M - \theta_1) - \frac{2B_0 a^3 \cos \theta_M}{R^3} = 0 \end{cases} \quad (7.5a)$$

$$\begin{cases} \theta\text{成分} & -B_1 \sin(\theta_M - \theta_1) - \frac{B_0 a^3 \sin \theta_M}{R^3} = 0 \end{cases} \quad (7.5b)$$

これを解くと

$$\begin{cases} R = a \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{8 + \cos^2 \theta_1} + \cos \theta_1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \end{cases} \quad (7.6a)$$

$$\begin{cases} \theta_M = \arctan \left(\frac{4 \sin \theta_1}{\sqrt{8 + \cos^2 \theta_1} + 3 \cos \theta_1} \right) \end{cases} \quad (7.6b)$$

を得る. 双極子の傾きがなく IMF が GSM の x 成分を持たない場合, θ_1 は IMF の時計角になる. このとき θ_M は北半球にある零点の時計角を表すことになる. θ_M は θ_1 の単調増加関数で, $\theta_1 = 0^\circ$ (真北向き IMF) のとき $\theta_M = 0^\circ$, $\theta_1 = 90^\circ$ (真横向き IMF) のとき $\theta_M = \arctan(\sqrt{2}) = 54.7^\circ$, $\theta_1 = 180^\circ$ (真南向き IMF) のとき $\theta_M = 90^\circ$ である. 驚くべきことに, MHD シミュレーションで再現される零点時計角の IMF 時計角依存性は, (7.6b) で非常によく近似される (Siscoe et al., 2001b).

以下の議論において表現を簡単にするため,

$$\begin{cases} r = a \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{1}{3}} \bar{r} \end{cases} \quad (7.7a)$$

$$\mathbf{B} = B_1 \bar{\mathbf{B}} \quad (7.7b)$$

と無次元化をする. (7.6a) の R (零点 M の地心距離) を無次元量で表現すると

$$\bar{R} = \left(\frac{\sqrt{8 + \cos^2 \theta_1} + \cos \theta_1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (7.8)$$

となる. \bar{R} は θ_1 の単調減少関数で, $\theta_1 = 0^\circ$ のとき $\bar{R} = 2^{\frac{1}{3}} = 1.26$, $\theta_1 = 90^\circ$ のとき $\bar{R} = 2^{\frac{1}{6}} = 1.12$, $\theta_1 = 180^\circ$ のとき $\bar{R} = 1$ である. また全磁場は(7.1)と(7.3)を足し合わせて

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}} = & \left(\cos \theta_1 \cos \theta - \sin \theta_1 \sin \theta \sin \varphi - \frac{2 \cos \theta}{r^{-3}} \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left(\cos \theta_1 \sin \theta - \sin \theta_1 \cos \theta \sin \varphi - \frac{\sin \theta}{r^{-3}} \right) \mathbf{e}_\theta - \sin \theta_1 \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (7.9)$$

と書ける. 磁力線を表す微分方程式は $\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \bar{\mathbf{B}}$ から

$$\begin{cases} \frac{d\bar{r}}{dt} = \cos \theta_1 \cos \theta - \sin \theta_1 \sin \theta \sin \varphi - \frac{2 \cos \theta}{r^{-3}} \end{cases} \quad (7.10a)$$

$$\begin{cases} r \frac{d\theta}{dt} = -\cos \theta_1 \sin \theta - \sin \theta_1 \cos \theta \sin \varphi - \frac{\sin \theta}{r^{-3}} \end{cases} \quad (7.10b)$$

$$\begin{cases} \bar{r} \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} = -\sin \theta_1 \cos \varphi \end{cases} \quad (7.10c)$$

と表せる. 卯酉面内での磁力線は(7.10)で $\varphi = \pm 90^\circ$ とおいて

$$\begin{cases} \frac{d\bar{r}}{dt} = \cos(\theta \pm \theta_1) - \frac{2 \cos \theta}{r^{-3}} \end{cases} \quad (7.11a)$$

$$\begin{cases} r \frac{d\theta}{dt} = -\sin(\theta \pm \theta_1) - \frac{\sin \theta}{r^{-3}} \end{cases} \quad (7.11b)$$

となる. 複合は上が $y > 0$ (夕方側)に, 下が $y < 0$ (朝方側)に対応する. (7.11)を数値的に解けば, 図 7.1 のような卯酉面での磁力線群が得られる.

無次元化された磁場勾配テンソル $\bar{\nabla} \bar{\mathbf{B}}$ ($\bar{\nabla} \equiv \frac{1}{a} \left(\frac{B_I}{B_0} \right)^{\frac{1}{3}} \nabla$) から固有値を求めると, それらは全

て実数である. 固有値の大きさを図 7.1 の $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ に対応させた添字を用いて表すと

$$\begin{cases} |\lambda_1| = \frac{3}{2R^3} \left(\sqrt{4 + 5 \cos^2 \theta_M} - \cos \theta_M \right) \\ |\lambda_2| = \frac{3}{R^3} \cos \theta_M \\ |\lambda_3| = \frac{3}{2R^3} \left(\sqrt{4 + 5 \cos^2 \theta_M} + \cos \theta_M \right) \end{cases} \quad (7.10)$$

となる. 図 7.2 に 3 次元の鳥観図を描いてある. \mathbf{x}_2 は卯酉面に垂直で, \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_3 は卯酉面内にある.

$|\lambda_3| > |\lambda_1| > |\lambda_2|$ であるから, 5 章の図 5.2a ($0 < a < 1$ の場合)に相当する. したがって $\text{fan}(\mathbf{x}_1$ と \mathbf{x}_2

が張る面)上の磁力線は, 零点 M 近傍では x_2 軸に接しながら M に収束し, 零点 N 近傍では x_2 軸に接しながら N から発散する. x_3 の極角 θ_B は, 図 7.1 のように θ_A を定めると, $\theta_B = \theta_M + \theta_A$ で, θ_A は

$$\theta_A = \arctan \left(\frac{2 \sin \theta_M}{\sqrt{4 + 5 \cos^2 \theta_M} + 3 \cos \theta_M} \right) \quad (7.11)$$

で与えられる. θ_A は θ_1 の単調増加関数で, $\theta_1 = 0^\circ$ のとき $\theta_A = 0^\circ$, $\theta_1 = 90^\circ$ のとき

$$\theta_A = \arctan \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17} + 3} \right) = 21.7^\circ, \quad \theta_1 = 180^\circ \text{ のとき } \theta_A = 45^\circ \text{ である.}$$

したがって θ_B も θ_1 の単調増加関数で, $\theta_B = 0^\circ$ ($\theta_1 = 0^\circ$) から $\theta_B = 76.4^\circ$ ($\theta_1 = 90^\circ$) を経て $\theta_B = 135^\circ$ ($\theta_1 = 180^\circ$) まで変化する.

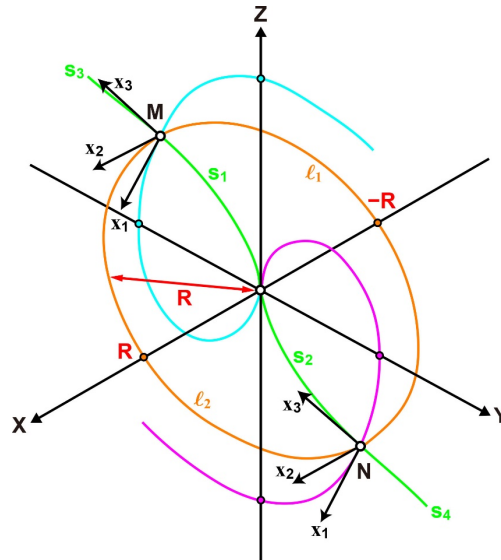


図 7.2 零点, 固有ベクトル, γ 線 (緑), セパレータ (橙) の様子を 3 次元的にみたもの. 水色, 紫色の線は x_1 方向の磁力線で, 図 7.1 の同色の磁力線に対応する.

図 7.2 において, 零点 N から x_2 方向に出る 2 本の磁力線 (ℓ_1 と ℓ_2) はともに零点 M に向かい, M 近傍では同様に x_2 に沿って零点 M に収束する. この ℓ_1 と ℓ_2 はセパレータである. 6 章で述べたように, 宇宙空間物理学でセパレータとはセパトラックス (Σ 面) の交線のことを言う. M から出る Σ 面と N から出る Σ 面の交線が ℓ_1 と ℓ_2 になる. 今後出てくる図では, 全てセパレータを橙色で表し, 記号の核文字には統一的に ℓ を使用する. ところで, ℓ_1 と ℓ_2 はユークリッド空間の円になる (セパレータ円と呼ぼう). 次にこれを示そう. まず, 零点 M, N を含む円

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{R} \\ \tan \theta \sin \varphi = -\tan \theta_M \end{cases} \quad (7.12a)$$

$$\tan \theta \sin \varphi = -\tan \theta_M \quad (7.12b)$$

を考えよう。(7.12a)は中心が原点で半径が \bar{R} の球面を表している。一方,(7.12b)は x 軸を含み, 零点 M, N を通る平面を表しており, 図 7.1 の ε (赤点線)に相当する。直交座標系で表現すれば $y + z \tan \theta_M = 0$ となる。球面(7.12a)と平面(7.12b)の交線は円である。実は円(7.12)がセパレータになっている。 x_2 は φ 成分しか持たないから, M, N の近傍ではセパレータが(7.12)で表されることはすぐにわかる。 M, N から離れたところでもセパレータが(7.12)であること言うには, 円(7.12)上の任意の点で, 磁力線に沿う変位 $(d\bar{r}, d\theta, d\varphi)$ が(1) $d\bar{r} = 0$ であり, かつ(2) $d\theta, d\varphi$ が平面(7.12b)上に拘束されていることを示せばよい。(1)は,(7.12a)と(7.12b)を(7.10a)に代入すれば $d\bar{r} = 0$ が得られる。(2)は以下のように示せる。まず平面上の拘束条件は(7.12b)を微分して

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = -\sin \theta \cos \theta \cot \varphi \quad (7.13)$$

と求められる。次に(7.12a)と(7.12b)を(7.10b)に代入して変形し,(7.10c)との比をとれば(7.13)が得られる。双極子磁場と一様磁場の重ね合わせて出来るセパレータが常に円になることは非常に興味深い。

零点 N から出る Σ 面(セパトリックス, 磁気面)のうち, セパレータ円より北側にあるものを描いたものが図 7.3 である($\theta_l = 90^\circ$ の場合)。このセパトリックスを β と名付ける。 β はセパレータ

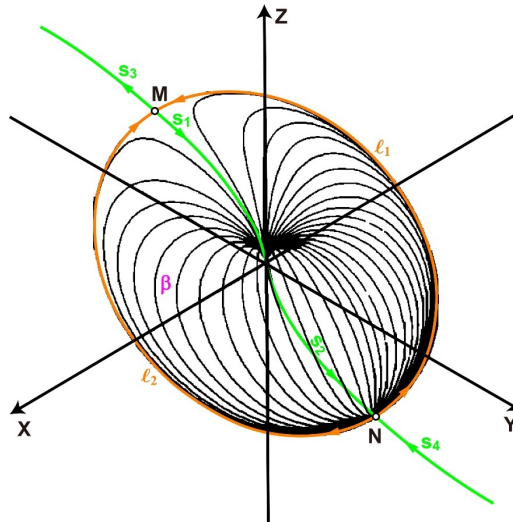


図 7.3 セパレータ円より北側にある開閉境界セパトリックス(N の Σ 面の一部; β と名前を付ける)を表す磁力線群。 N の Σ 面は今後紫色(図中の β の色)で表す。図 7.2 で同色の紫色磁力線はこの Σ 面上にある。

円より北側にある, 磁力線の開閉 (open-closed) 境界を表している. また北半球の stemline s_1 は β 上にある. 同様に, 零点 M から出る Σ 面のうち, セパレータ円より南側にあるものを α と名付ける. α の形状は原点に関して β と対称で, 磁力線の向きが β と逆になる. α はセパレータ円より南側にある, 磁力線の開閉境界を表している. また南半球の stemline s_2 は α 上にある. α と β を合わせると, トポロジ的にはトーラスと同相となる. 同相とは, 数学で言う“homeomorphic”の意味で使っている.

図 7.4 は零点 M から出る Σ 面 (セパトリックス, 磁気面) のうち, セパレータ円より北側にあるものを描いたものである. このセパトリックスを γ と名付ける (γ 線の γ とは無関係である). γ はセパレータ円より北側にある, 磁力線の open-interplanetary (connected-unconnected) 境界を表している. また反対半球の N に入る s_4 は γ 上にある. 同様に, 零点 N から出る Σ 面のうち, セパレータ円より南側にあるものを δ と名付ける. δ の形状は原点に関して γ と対称で, 磁力線の向きが γ と逆になる. δ はセパレータ円より南側にある, 磁力線の open-interplanetary 境界を表している. また反対半球の M から出る s_3 は δ 上にある. γ と δ を合わせると, トポロジ的には円筒と同相となる.

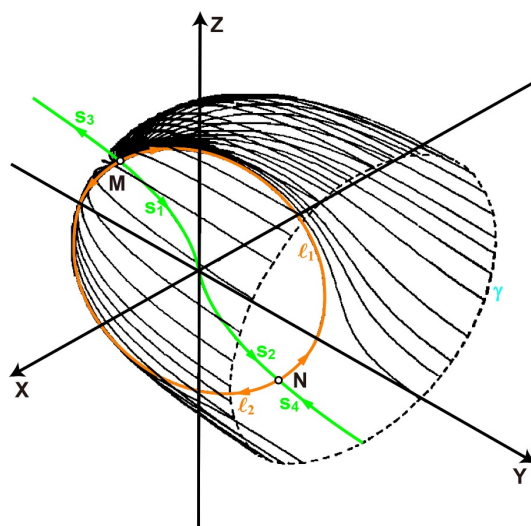


図 7.4 セパレータ円より北側にある開磁場-IMF 境界セパトリックス (M の Σ 面の一部; γ と名前を付ける) を表す磁力線群. M の Σ 面は今後水色 (図中の γ の色) で表す. 図 7.2 で同色の水色磁力線はこの Σ 面上にある.

円筒とトーラスの関係をもっと直観的に描いたものが図 7.5 である. トポロジー (位相関係) を示すため, 実際の形状 (ユークリッド空間の計量) は無視してあるが, IMF $B_y < 0, B_z < 0$ の場合を太陽方向から眺めたとせば比較的理解しやすいと思う. 円筒 (γ と δ) の外部が惑星間空間 (unconnected) に, 円筒の内部が磁気圏に相当する. 円筒にトーラス (α と β) が内接し, その接線がセパレータ円 (ℓ_1 と ℓ_2) である. また β と γ に囲まれた領域が北半球のローブで, α と δ に囲まれた領域が南半球のローブである. トーラス上の磁力線には以下の特徴がある. 南半球の電離圏か

ら出た α 上の磁力線は, s_2 を除き全て M に収束する. 北半球の電離圏に向かう β 上の磁力線は, s_1 を除き全て N から発散する. 同様のことが円筒上の磁力線にも言える. 無限遠からやってくる γ 上の磁力線は s_4 を除き全て M に収束する. 無限遠へ行く δ 上の磁力線は上の磁力線は s_3 を除き全て N から発散する. 零点 M と N は, うまい具合に 6 章で説明したヘテロクリニックな横断性の鞍点結合を形成している. 零点 M (A 型) の fan Σ_A (安定多様体) が α と γ (水色) で, spine γ_A (不安定多様体) が s_1 と s_3 (緑色) である. 零点 N (B 型) の fan Σ_B (不安定多様体) が β と δ (紫色) で, spine γ_B (安定多様体) が s_2 と s_4 (緑色) である. セパトリックス β と γ に挟まれる空間を「北ローブ (north lobe, NL)」, セパトリックス α と δ に挟まれる空間を「南ローブ (south lobe, SL)」と呼ぶことにする. それぞれ北半球の電離圏, 南半球の電離圏に投影されるローブという意味である. 次に示す IMF 北向き時の場合のように, 北ローブが常に北半球に, 南ローブが常に南半球にあるわけではないことは注意を要する.

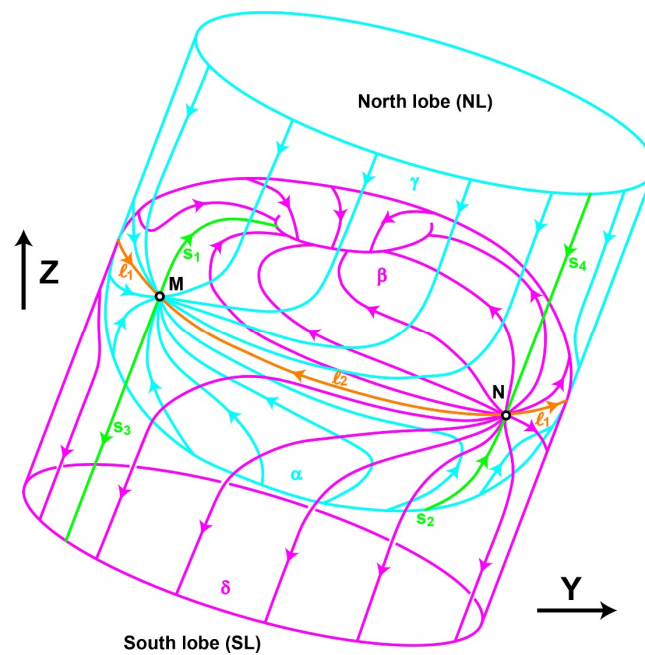


図 7.5 2-零点, 2-セパレータの基本構造を太陽方向から見たもの. IMF 南向きで $B_y < 0$ の場合を想定して描いてある.

図 7.5 は IMF が南向きの場合の形状に近いが, IMF が北向きであってもトポロジーは同じである. ただしローブが反対半球に向かって広がるので直観的理解が難しい. 図 7.6 に IMF $B_y < 0, B_z > 0$ の場合を太陽方向から眺めたものを示す. 図 7.5 と本質的に変わっていない.

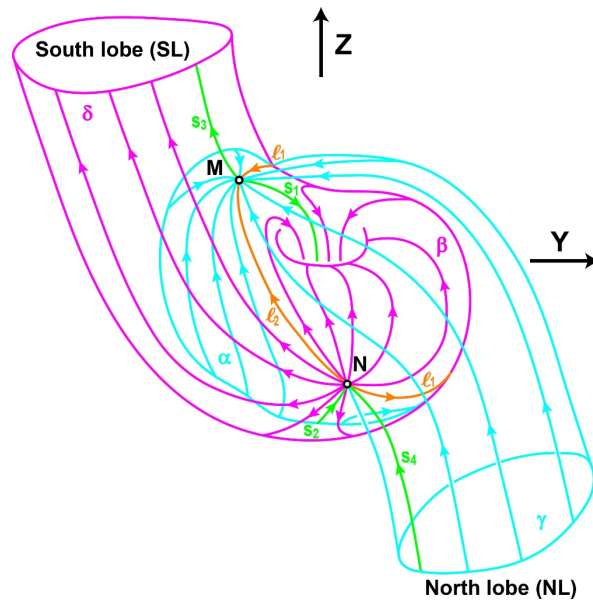


図 7.6 IMF 北向きで $B_y < 0$ の場合を想定して描いた 2-零点, 2-セパレータ構造.

図 7.5 (または図 7.6) が磁気圏の基本トポロジー構造である. 零点 2 個, セパレータ 2 本から成るので「2-零点, 2-セパレータ構造」あるいは簡単に「零点-セパレータ構造」と呼ばれている.

(注)「赤道面」「子午面」「卯酉面」

日本の宇宙空間物理学のコミュニティでは, 磁気圏の断面を表すとき, 「赤道面」, 「子午面」という言葉が普通に使われる. 赤道面はいいとして, 子午面とはどういう意味であろうか. 本来の日本語には, 北(子)と南(午)を結ぶ線という意味で「子午線」という言葉はあるが, 「子午面」という言葉はない. 「0 時または 12 時の子午線を含む面」と解釈できないこともないが, むしろ「0 時(子)と 12 時(午)を含む面」という意味の造語だと考えるほうがすっきりする. そこで 3 番目の断面として, 6 時(卯)と 18 時(酉)を含む面を「卯酉面(ぼうゆうめん)」と呼ぶことにする. ただし, 子午線と直交する「卯酉線」という日本語もあるので注意を要する. これは東(卯)と西(酉)を結ぶ線という意味である. 赤道面, 子午面, 卯酉面は, 英語ではそれぞれ equatorial plane, noon-midnight plane, dawn-dusk plane である. GSM 座標系ではそれぞれ xy 面, xz 面, yz 面に対応する. 子午線, 卯酉線は, 英語ではそれぞれ meridian, prime meridian である.

7.2 IMF の向きが切り替わるときのトポロジー

定常 IMF 下の磁気圏磁場トポロジーは図 7.5 (または図 7.6) が基本構造である. では, ある時刻に定常 IMF から別の定常 IMF に突然切り替わった場合どうなるであろうか. 例えば IMF が北向きで, IMF B_y 成分が反転するとシートオーロラが形成されることが知られている (Cumnock et al.,

1997). この時の磁場トポロジーはどうなるであろうか. 別の例では, IMF が北向きから南向きに反転するとサブストームの成長相が始まるが, この時の磁場トポロジーはどうなるであろうか. 直観的には古い IMF の零点-セパレータ構造と, 新しい IMF の零点-セパレータ構造が共存することが考えられる. すなわち, 夜側および内部の磁気圏は古い IMF で記述されるのに対し, 昼側および外部の磁気圏は新しい IMF で記述される.

Watanabe and Sofko (2008)は単純に古い IMF の基本構造と新しい IMF の基本構造をつなぎ合わせることを考えた. 図 7.7 は彼らが考えた単純接合モデルで, トポロジーの主要骨格を示したものである. GSM 座標系で南向き IMF 時に B_y 成分が負から正に反転した場合を太陽側のやや夕方寄りから眺めた状況を想定すると理解しやすい. 零点が 4 個あり, 夜側の M と N が $B_y < 0$ 時の零点で(図 7.5 参照), 昼側の J と K が $B_y > 0$ 時の零点である. M と J は A 型零点で, N と K は B

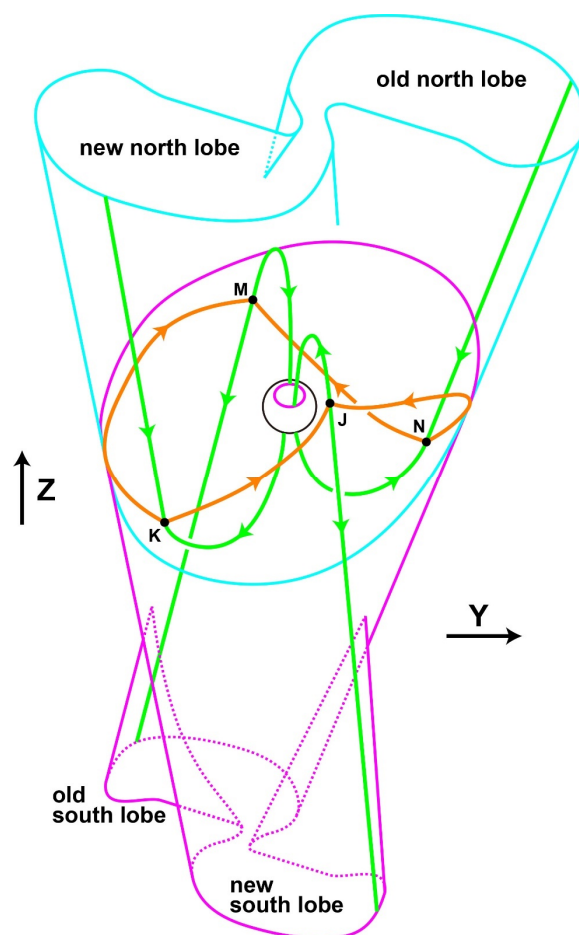


図 7.7 IMF が急激に方向を変える場合に予想される磁気圏磁場トポロジー. 地球(中央部の球)における紫色の楕円は Σ_A 面と電離圏の交線で, いわゆる(北半球の)極冠境界である.

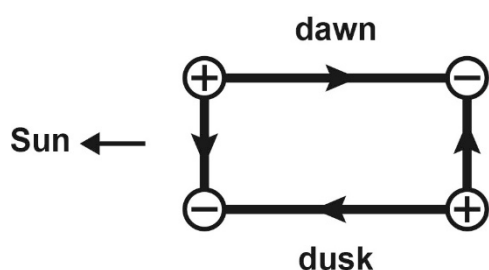
型零点である。N から M に向かう夜側の磁力線はセパレータで図 7.5 の ℓ_1 に相当する。図 7.7 はこれまでと同じ色でトポロジーを表現している。水色は M と J の Σ_A 面（安定多様体）で、北ローブ–惑星間空間境界セパトリックスと、南半球の開閉境界セパトリックスを表している。一方、紫色は N と K の Σ_B 面（不安定多様体）で、南ローブ–惑星間空間境界セパトリックスと、北半球の開閉境界セパトリックスを表している。 Σ_A 面と Σ_B 面の交線がセパレータ（橙色）で円と同相である。このセパレータ円上に前述の 4 個の零点がある。また零点から出る γ 線は緑色で描いてある。 γ_A は Σ_B 上に、 γ_B は Σ_A 上にある。地球に近い領域では古いトポロジー構造と新しいトポロジー構造を連続的に繋げることが可能である。しかし地球から離れたところでは、古いローブと新しいローブが全く反対の方向に広がってゆくので、これを連続的に繋げることができない。地球から遠いところにおいては、古いローブと新しいローブの境界は接線不連続（tangential discontinuity）になっていると考えられる。

ではシミュレーションで得られる磁気圏はどうであろうか。Tanaka et al. (2018)は北向き IMF 時に B_y 成分が反転してシートオーロラが形成される過程を調べた。その結果、シートオーロラにともなう磁場トポロジーは正に図 7.7 で説明されることがわかった。現実的磁気圏が図 7.7 のようなごく簡単なモデルで説明できることは、ある意味驚くべきことである。夜側 stemline（図 7.7 では零点 M から北半球電離圏につながる stemline と零点 N から南半球電離圏につながる stemline）の根元が、電離圏高度では夜側プラズマシートが太陽方向に突出する部分（ Θ の横棒）の先端になっている。M（夜側、北半球、朝側）から北半球夜側電離圏につながる stemline は、K（昼側、南半球、朝側）から広がる β 面と N（夜側、南半球、夕側）から広がる β 面の境界に当たる。同様に、N（夜側、南半球、夕側）から南半球夜側電離圏につながる stemline は、J（昼側、北半球、夕側）から広がる α 面と M（夜側、北半球、朝側）から広がる α 面の境界に当たる。このように、昼夜、南北、朝夕がクロスしているのはおもしろい。図 7.7 の零点結合を単純化したのが図 7.8a である。4 個の零点（鞍点）がセパレータで結ばれている。

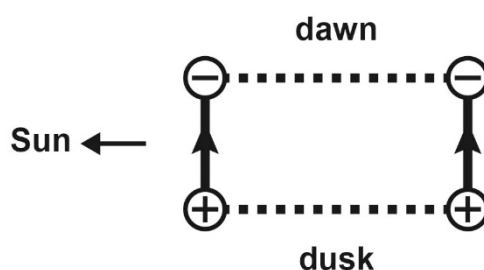
それでは IMF B_z が反転する場合はどうであろうか。Tanaka et al. (2019)は IMF が（ B_y 成分はそのまま）北向きから南向きに反転し、サブストームの成長相が始まる場合の磁気圏を調べた。その結果が図 7.8b である。（ただし零点近傍の磁力線を試行錯誤的に描くことで得られた解釈であり、厳密なトポロジー解析の結果ではない。その意味で不確実性がある。）この場合、磁場トポロジーは図 7.8a とやや異なっている。古い IMF に対応する夜側零点 2 個と新しい IMF に対応する昼側零点 2 個の合計 4 個の零点から成ることは図 7.8a と共通であるが、零点結合の様態が異なっている。IMF B_y の符号が変わらないので、夕側に正の零点、朝側に負の零点という配置は IMF 変化の前後で変わらない。その結果、夜側零点と昼側零点を結ぼうとすると、セパレータではなく零線（null line）にならざるを得ない。零線は 5 章で考察した 1 次の零では 2 次元構造（一方向に一様）

の場合しかなく, そのような零線は不安定で, 大規模構造として 3 次元空間に存在するか疑問である. ただし 2 次項を含む零を考えれば準安定な零線は可能かもしれない. 2 次項の解析は極めて複雑であり, 一般的な扱いはないようである. また, シミュレーションでは, サブストームの成長相から拡大相に移る過程でトポロジーの分岐が起こる. 2 つの異なる閉磁力線同士でリコネクションが起こり, いわゆる近尾部磁気中性線 (near Earth neutral line) が形成される.

(a) B_z+ , B_y- to B_y+



(b) B_y- , B_z+ to B_z-



⊕ positive (type B) null

⊖ negative (type A) null

— separator

..... null line

図 7.8 IMF が急激に方向変化する場合の磁場トポロジー骨格 2 例.

8 章 トポロジーで解釈する電離圏対流

8.1 2-零点, 2-セパレータの基本構造で起こる磁気リコネクション

8.1.1 3次元リコネクションの磁場トポロジー

リコネクションと聞けば反平行磁場のつなぎ換えを思い浮かべるかもしれないが, これは2次元の描像である. 3次元でのリコネクションは本質的に平行磁場の入れ替わりである. したがって, いわゆるX線(X line の日本語訳, 別の意味のX線と紛れはなからう)に沿う磁場が本質的で, X線に沿う電場すなわち沿磁力線電場がリコネクションの効率を表すことになる(Schindler et al., 1988; Hesse & Schindler, 1988; Greene, 1988). 第1章で述べたように, 沿磁力線電場は座標系に依らない(ガリレイ不変)量で, 本質的な物理量である. リコネクションを沿磁力線電場で説明する考えはそれ以前の概念を大きく変えるものであり, その意味で1988年は画期的な年であった. 3次元リコネクションをまず直観的に説明してみよう(図8.1). リコネクションに磁気零点は必ずしも必要でな

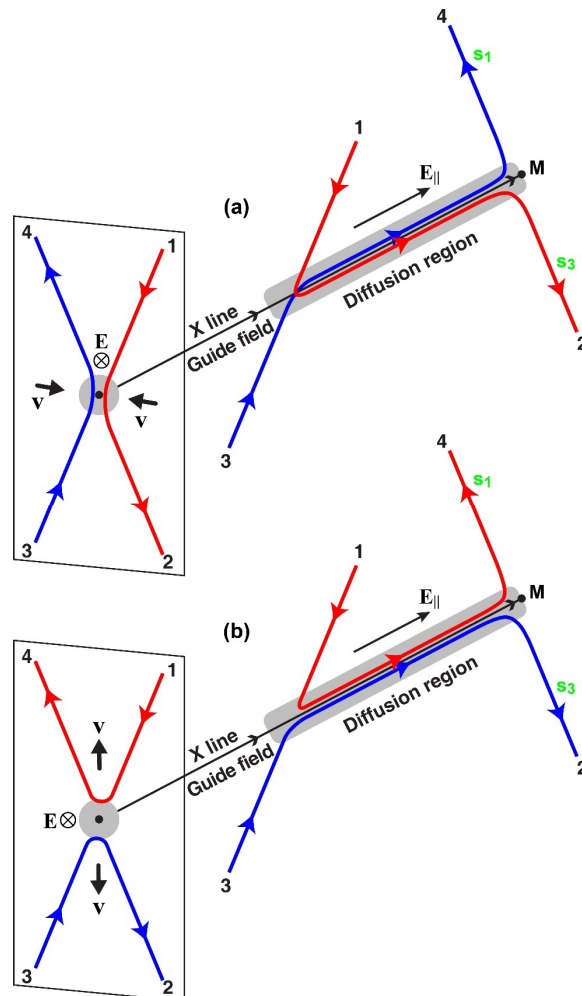


図 8.1 3次元空間におけるリコネクション. 一般には右端の零点は必ずしも必要でない.

い。しかし本章では零点-セパレータ構造で起こるリコネクションを考察するので、後の説明と対応させるため、図 8.1 のように拡散領域の端に A 型零点 M を設ける。M からは γ 線 s_1 と s_3 が出ていく(図 7.5 や図 7.6 と同じ記号と色を用いている)が、図 8.1 には示してない。赤と青の磁力線が γ 線近傍にあり、これらを s_1 や s_3 と同一視して構わない。拡散領域に入ると磁力線は大きく変形し、相手方の磁力線と平行になると同時にアイデンティティを失う(図 8.1a)。その結果、接続するパートナーを変えリコネクションが起こる(図 8.1b)。この状況を平行磁場に垂直な面に投影すると、図 8.1 の左側に示すような 2 次元リコネクションと同様の X 状の磁力線つなぎ換えに見える。したがって X の中心を通り面に垂直な直線を X 線(X line)と呼ぶ。また X 線に平行な磁場を案内磁場(guide field)と呼ぶ。3 次元リコネクションの場合は必ず有限の案内磁場が存在し、リコネクションの効率を決めるのは案内磁場に沿う沿磁力線電場である。図 8.1 の場合、電場は案内磁場と同方向である。もし電場の向きが逆であれば、図 8.1 のプラズマ流の向きが逆になり、その結果リコネクションは図 8.1b から図 8.1a に進む。電場の向きは形式的にリコネクションの向きを決めるとも言える(物理的な因果関係を言っているのではない)。

8.1.2 Dungey のリコネクション

7 章で説明したように、定常 IMF の条件下の大域的な磁気圏磁場トポロジーは、2-零点、2-セパレータ構造である。それではこの基本構造のもとではどのようなリコネクションが可能であろうか。「基本構造のもとでは」とは、基本構造を定常的に保つリコネクションという意味である。もちろん、基本構造を壊すリコネクションもある(例えばサブストーム開始時に地球近傍の尾部で起こるリコネクション)。これらのリコネクションによるトポロジー変化は複雑だが局所的であり、大域的には基本構造が維持される。2-零点、2-セパレータの基本構造では、セパトリックスにより空間が(1) IMF、(2) 閉(closed)磁力線、(3) 北ローブ(以下 NL と略す)、(4) 南ローブ(以下 SL と略す)、の 4 つのトポロジー領域に分けられる。したがって起こり得るリコネクションはこの 4 領域間の組み合わせを網羅すればよい。

まずよく知られた Dungey (1961)のリコネクションを考えよう。これを方程式風に書けば

$$\text{IMF} + \text{closed} \rightarrow \text{NL} + \text{SL} \quad (\text{D1})$$

$$\text{NL} + \text{SL} \rightarrow \text{closed} + \text{IMF} \quad (\text{D2})$$

となる。これらを Dungey 型リコネクションと呼ぼう。リコネクションに関与する 4 領域が接触するのはセパレータ上(ℓ_1 と ℓ_2) だけである。したがって ℓ_1 または ℓ_2 上に図 8.1 のような拡散領域があれば Dungey 型のリコネクションが起こる。

図 8.2 は磁気零点 M 近くのセパレータ ℓ_1 上に拡散領域を設けた場合のリコネクションである。図 8.1 と比較できるように描いてあるので並べて眺めてほしい。赤磁力線と青磁力線はそれぞれ図 8.1 の同色磁力線に対応する。またトポロジー構造の要素には図 7.5 や図 7.6 と同じ記号や色を用

いている. 図 8.2 において, 実線の磁力線はセパトリックスの手前に, 点線の磁力線はセパトリックスの向こう側にある. 例えば, 図 8.2a で赤い磁力線は γ と δ (円筒) の外にあり, 青い磁力線は α と β (トーラス) も内にある. ℓ_1 上のリコネクション電場が零点 M の方向を向いているとき, トポロジーは図 8.2a から図 8.2b に変化する (図 8.1 も参照). リコネクションの前後で磁力線がセパトリックスを通過することに注意してほしい. すなわち, 実線の磁力線は点線になり, 点線の磁力線は実線になる. 磁力線がセパトリックスを通過する瞬間, その磁力線は零点 M に繋がることになる. もし逆に, リコネクション電場が零点 M から離れる方向を向いている場合には, トポロジーは図 8.2b から図 8.2a に変化する.

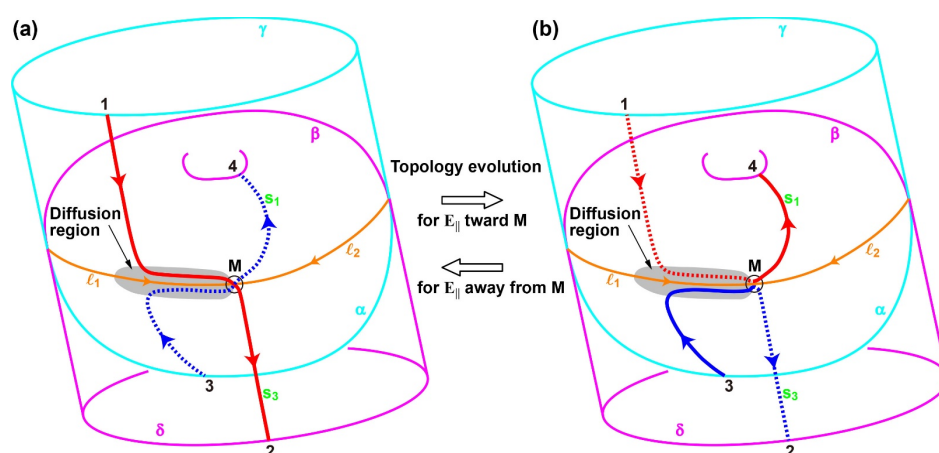


図 8.2 基本トポロジー構造における Dungey 型リコネクション (その 1: 零点 M 付近のセパレータ ℓ_1 に拡散領域がある場合). リコネクションが図 8.2a から図 8.2b に進むとき, 赤い磁力線と青い磁力線はそれぞれ図 8.1 の赤い磁力線と青い磁力線に対応する. 紫色 (β, δ), 水色 (α, γ), 橙色 (セパレータ), 緑色 (特異線) の使い方は 7 章と同じ.

全く同様に零点 M に隣接する ℓ_2 上で Dungey 型リコネクションを考えることができる (図 8.3). 図の表現法は図 8.2 と同じである. また図 8.1 と比較できるように記号や色が使われていて, トポロジーは同相である. ただし, 図 8.1 における磁力線の形状は適宜変形して考える必要がある. ℓ_2 上のリコネクション電場が零点 M の方向を向いているとき, トポロジーは図 8.3a から図 8.3b に変化する. 逆に, リコネクション電場が零点 M から離れる方向を向いている場合には, トポロジーは図 8.3b から図 8.3a に変化する.

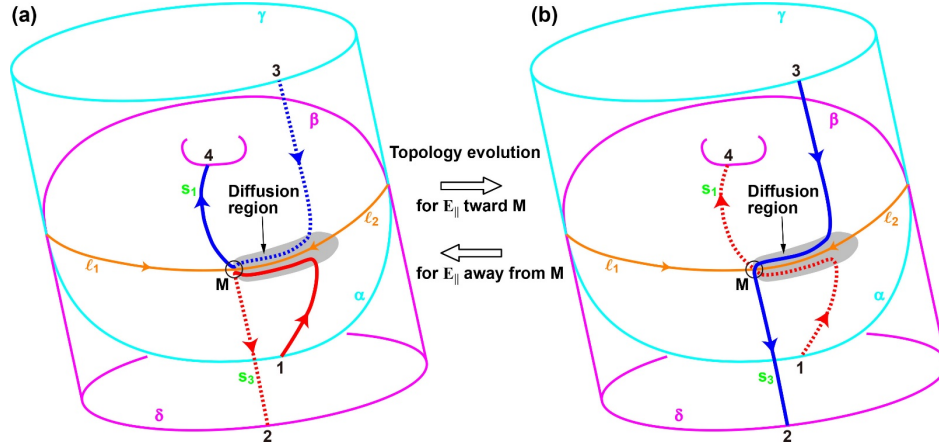


図 8.3 基本トポロジー構造における Dungey 型リコネクション(その2:零点 M 付近のセパレータ ℓ_2 に拡散領域がある場合)。

先に(D1)と(D2)を Dungey 型と呼ぶと述べたが, この 2 つは Dungey が提唱したという以外に, 原点と無限遠点を同一視ればトポロジーも同相であるという共通の性質を持っている. 射影幾何で扱うような無限遠点を考え, 3 次元ユークリッド空間に無限遠点を加えて閉じた空間を作ってやる(いわゆるリーマン球面を 3 次元に拡張すると思えばよい). 以下, この空間でトポロジーを考える. 閉じた磁力線は原点から出て原点に返ってくる. 開いた磁力線は原点から出て無限遠点に行く. IMF は無限遠点から出て無限遠点に戻る. したがって原点と無限遠点を入れ代えてやれば, (D1)と(D2)はトポロジー的に同じである. 原点を無限遠点に, 無限遠点を原点に写すような全単射の写像には, 例えば球による反転

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{R^2}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

がある. ここで R は基準となる球の半径である. 開閉境界を表すトーラス面上に原点がある(トーラスの穴は原点のみ). 一方, 開磁場-IMF 境界を表す円筒面上に無限遠点がある. 写像(8.1)のような変換でトーラスと円筒が入れ代わることに気付けば, (D1)と(D2)が同相であることが理解できる.

図 8.2 と図 8.3 では零点 M (A 型) の近くで起こる Dungey 型リコネクションを考えた. 全く同様なリコネクションを零点 N (B 型) の近くで考えることが出来る. Dungey 型リコネクションは何種類あるであろうか. 零点が M か N かで 2 通り, 拡散領域があるセパレータが ℓ_1 か ℓ_2 で 2 通り, リコネクション電場の向きが零点に向かうか遠ざかるかで 2 通り, 全部で $2^3 = 8$ 通りの Dungey 型リコネクションがある. そのうち 4 通りが(D1)で, 残りの 4 通りが(D2)である. これら 16 通りが完全に独立かというと, 必ずしもそうとは言えない. 図 8.2 (ℓ_1 上のリコネクション)や図 8.3 (ℓ_2 上のリコネクション)において, リコネクションの瞬間, 磁力線はセパラトックスを通過すると同時に零点 M につながることを述べた. リコネクションの瞬間の磁力線はセパレータであると考えられるので, M につながる

磁力線はNにもつながっていることになる。そうすると、Mが関与するリコネクションとNが関与するリコネクションに何らかの関係があると考えてもおかしくない。例えば、2つのリコネクションが ℓ_1 上（または ℓ_2 上）で同時に起こると解釈することが可能である。実際 Priest & Titov (1996)は、A型とB型の零点がセパレータで結ばれている状況下で（横断的鞍点結合）、2つの零点を磁力線が同時に通過するような速度場（磁力線の運動が frozen-in であると考え）を初等関数で与えている。Priest & Titov (1996)はこれを「セパレータリコネクション」と呼んでいる。したがって図 8.2 や図 8.3 はセパレータリコネクションの半分であると考えすることもできる。しかし拡散領域内で磁力線はアイデンティティを失うので、拡散領域に入った磁力線が2本に分裂し、1本が図 8.2（または図 8.3）に示す零点 M のリコネクションを起こし、もう1本が零点 N のリコネクションを起こすという解釈も可能である (Cowley, 1973)。

8.1.3 IMF とローブ磁場のリコネクション

続いて Russell (1973)が提唱した IMF 力線とローブ磁力線のリコネクションを考えよう。これを方程式風に表現すると

$$\text{IMF} + \text{NL} \rightarrow \text{NL} + \text{IMF} \quad (\text{R1})$$

$$\text{IMF} + \text{SL} \rightarrow \text{SL} + \text{IMF} \quad (\text{R2})$$

となる。このリコネクションも比較的早くから受け入れられた。反平行磁場リコネクションの描像で (R1)を描いたものが図 8.4 である。太陽は左側にある。IMF 力線 a-b と NL 磁力線 c-d がつなぎ換わり (図 8.4a, ×印)、新たな NL 磁力線 a-d と IMF 力線 c-b が生み出される (図 8.4b)。ここで注意すべきことは、図 8.4 の反平行磁場による描像は、直観的理解を助けるための便宜だということである。実際のリコネクションは図 8.1 で説明したように平行磁場の入れ換わりである。

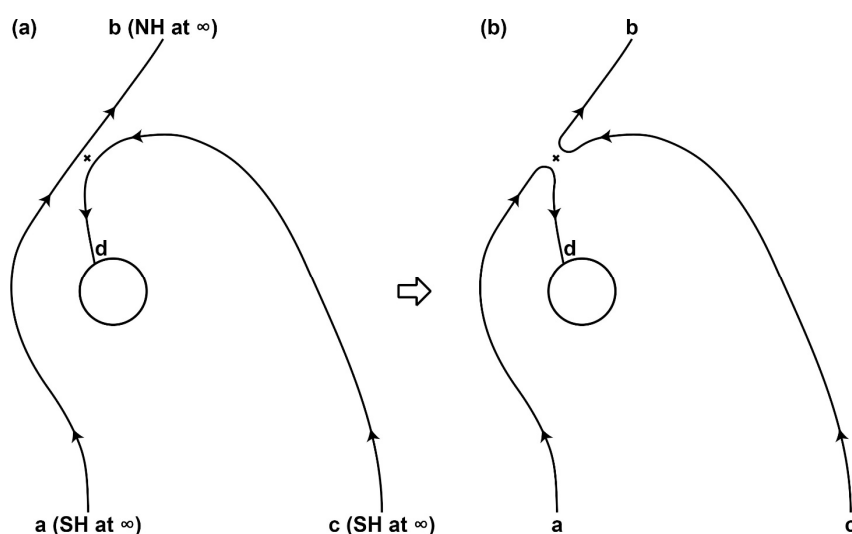


図 8.4 IMF 北向き時の(R1)を反平行磁場リコネクションの描像で表現したもの。太陽は左側にある。

IMF とローブ磁場のリコネクションが 2-零点, 2-セパレータ構造でどう起こるか考えてみよう。IMF 力線と NL 磁力線が接触できるのは γ 上のみである。したがって (R1) は零点 M 付近の γ 上の拡散領域で起こる。同様に IMF 力線と SL 磁力線が接触できるのは δ 上のみである。したがって (R2) は零点 N 付近の δ 上の拡散領域で起こる。図 8.5 は零点 M 近くの γ 上に拡散領域を設けて IMF と NL 磁場のリコネクションを起こした場合である。図の表現法は図 8.2 や図 8.3 と同じである。特に実線の磁力線はセパトリックスの手前で、点線の磁力線はセパトリックスの向こう側であることを思い起してほしい。また図 8.1 と比較できるように同じ記号や色が使われている。リコネクション電場が零点 M の方向を向いているとき、トポロジーは図 8.5a から図 8.5b に変化する。Dungey 型 (図 8.2 と図 8.3) との大きな違いが 2 つある。Dungey 型の場合、全ての磁力線がセパトリックスを通過するが、図 8.4 でセパトリックスを通過する磁力線は γ に隣接している部分だけである。また Dungey 型の場合、リコネクション前後で磁力線のトポロジー領域は完全に変化するが、(R1) と (R2) の左辺と右辺は同じである。しかし何も変化しないわけではなく、図 8.5 で点 1 がある磁力線 (赤) は IMF から NL に変換し、点 3 がある磁力線 (青) は NL から IMF に変換する。この状況を表現するため、(R1) と (R2) では左辺と右辺の順番を入れ替えている。このようにリコネクション前後で磁力線のトポロジー領域が入れ換わるので、(R1) と (R2) を「交換型リコネクション (interchange-type reconnection)」と呼んでいる (Watanabe & Sofko, 2009a, 2009b)。交換型リコネクションについては、次のローブ磁場-閉磁場リコネクションでも議論する。図 8.5 でリコネクション電場が零点 M から離れる方向を向いている場合には、トポロジーは図 8.5b から図 8.5a に変換することは、図 8.2 や図 8.3 と同様である。また IMF と SL のリコネクションは零点 N の近くの δ 上で起こる。したがって IMF とローブ磁力線のリコネクションは $2^2 = 4$ 通りある。

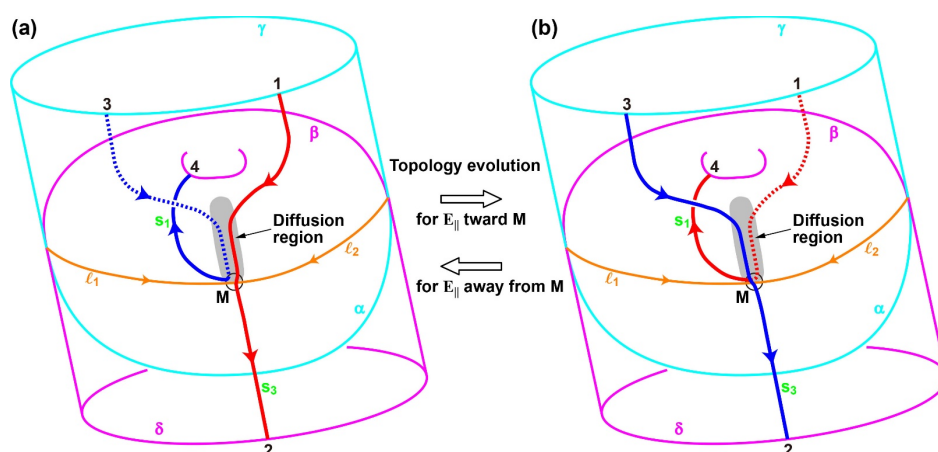


図 8.5 基本トポロジー構造における IMF と NL 磁場のリコネクション。

8.1.4 ロープ磁場と閉磁場のリコネクション

最後に, Tanaka (1999)が提唱した開磁力線(ローブ)と閉磁力線のリコネクションを考えよう. これまで同様方程式風に表現すると

$$\text{NL} + \text{closed} \rightarrow \text{closed} + \text{NL} \quad (\text{T1})$$

$$\text{SL} + \text{closed} \rightarrow \text{closed} + \text{SL} \quad (\text{T2})$$

となる. このリコネクションは直観的理解が難しく, 認識されるのが遅かった. 図 8.6 に(T1)の反平行磁場リコネクションによる描像を示す. ただし, 図 8.4 と同様に, 反平行磁場による描像はあくまでも直観的理解を助ける便法である. 図 8.6 で太陽は左側にある. NL 磁力線 e-f と閉磁力線 g-h がつなぎ換わり(図 8.6a, ×印), 新たな閉磁力線 g-f と NL 磁力線 e-h が作られる. 図 8.6 からわかるように, ロープ磁場と閉磁場のリコネクションは, ロープがつながる半球とは反対の半球で起こる. すなわち(T1)には零点 N が関与し, (T2)には零点 M が関与する. もう一つの特徴は, 電離圏における磁力線の根元の「とび」である. 図 8.6 において, 南半球の点 g に根元をもつ閉磁力線は, (T1)により北半球の磁気共役点が h から f に突然変わる. 同様に, 太陽風中の点 e を通る NL 磁力線は, その根元が突然点 f から点 h に変わる. このように, ロープ磁力線と閉磁力線のリコネクションでは, 開磁束と閉磁束の入れ換わりが起こる. このため, (T1)および(T2)を「交換リコネクション(interchange reconnection)」と呼ぶ(Crooker et al., 2002). ただし前出の「交換型リコネクション(interchange-type reconnection)」とは意味が少し違う. この違いについては後述する. 交換リコネクションの特徴は, 開閉磁束の入れ換わりに付随して磁気共役点が突然遠方に移動することである. このため直観的理解が難しい現象が起こる.

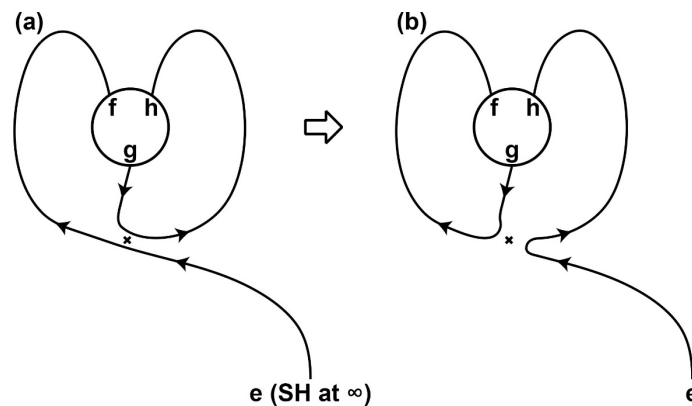


図 8.6 IMF 北向き時の(T1)を反平行磁場リコネクションの描像で表現したもの. 太陽は左側にある.

ローブ磁場と閉磁場のリコネクションを 2-零点, 2-セパレータの基本構造で考えてみる. 基本構造において NL 磁場と閉磁場が接触できるのは β 上のみである. また SL 磁場と閉磁場が接触できるのは α 上のみである. したがって(T1)は β 上の拡散領域で起こり, (T2)は α 上の拡散領域により起こる. 図 8.7 は零点 M 近くの α 上に拡散領域を設けて SL 磁場と閉磁場のリコネクション(T2)を

起こした場合である。図の表現法は図 8.2, 図 8.3, 図 8.5 と同じである。また図 8.1 と比較できるように同じ記号や色が使われている。リコネクション電場が零点 M の方向を向いているとき、トポロジーは図 8.7a から図 8.7b に変化する。このリコネクションは以下の性質を有している。(1) リコネクション時にセパトリックスを通過する磁力線は α に隣接している部分だけである。(2) リコネクションにより、点 1 がある磁力線 (赤) は SL 磁場から閉磁場に変化し、点 3 がある磁力線 (青) は閉磁場から SL 磁場に変化し、結果としてトポロジー領域が入れ替わる。これら 2 つの性質は、(R1)や(R2)と全く同じである。したがって(T1)と(T2)も「交換型リコネクション」と呼べるものである (Watanabe & Sofko, 2009a, 2009b)。実際、(R1)・(R2)のトポロジーと(T1)・(T2)のトポロジーは同じである。写像(8.1)により、トーラスは円筒に、円筒はトーラスになることを考えれば明らかであろう。

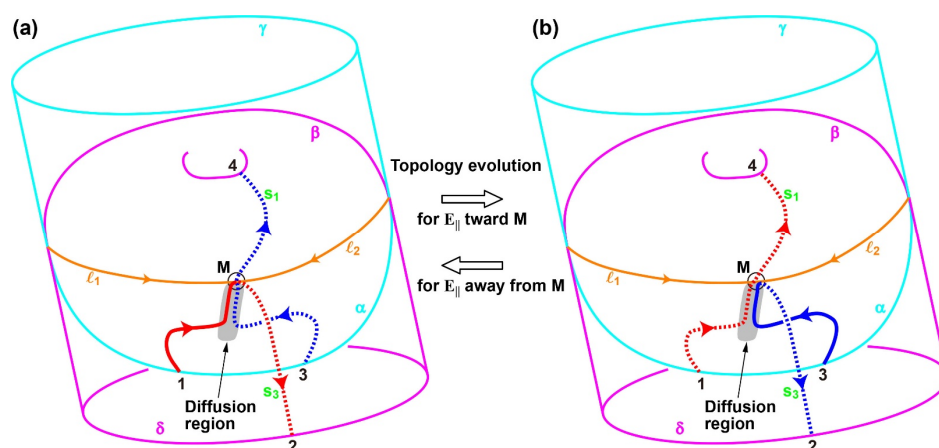


図 8.7 基本トポロジー構造における SL 磁場と閉磁場のリコネクション(T2)。

歴史的には、地球磁気圏におけるリコネクションで「交換 (interchange)」という言葉は当初(T1), (T2)に対して用いられ (Merkin & Crooker, 2008), その後 (R1), (R2)にも拡張された (Watanabe & Sofko, 2009a, 2009b). 参考のため、その経緯を述べよう。太陽におけるコロナ質量放出 (CME) の解釈において、Crooker et al. (2002)が開磁力線と閉磁力線のリコネクションを「交換リコネクション (interchange reconnection)」と呼んだのが用語の初出である。地球磁気圏において、開磁力線と閉磁力線のリコネクションの存在を最初に指摘したのは Tanaka (1999)であるが、これを Watanabe et al. (2004)は Crooker (1992)が用いた「内部リコネクション (internal reconnection)」という言葉で呼んだ。その意図は、マグネトポーズでの Dungey 型リコネクションで磁気圏前面を覆うローブ磁場ができ、そのローブ磁場が順次的にマグネトポーズより内側で起こすリコネクションという意味である。ただし Crooker (1992)が内部リコネクションと呼んだリコネクションは Dungey 型 (8.2 節で述べる逆 Dungey サイクルの一部) であった。これに対し Merkin & Crooker (2008)は地球磁気圏でも開磁力線と閉磁力線のつなぎ換えに「交換リコネクション」という言葉を用いた。以後この用語が使われるようになった。ところで、(R1)および(R2)も(T1)や(T2)とトポロジー的には同相なので、Watanabe &

Sofko (2009a, 2009b)は(R1)と(R2)を含めて「交換型リコネクション (interchange-type reconnection)」と呼んだ。「交換リコネクション」は(T1)と(T2)だが、「交換型リコネクション」は(R1), (R2), (T1), (T2)全てである。Watanabe & Sofko (2009a, 2009b)は「型 (type)」のあるなしで意味を区別しようとしたのだが、一般にはあまり認識されていないようである。

図 8.7 に戻り, 基本構造におけるローブ磁場と閉磁場リコネクションの場合の数を考えてみる。リコネクション電場が零点 M から離れる方向を向いている場合には, トポロジーは図 8.7b から図 8.7a に変化することは, 図 8.2, 図 8.3, 図 8.5 と同様である。また, NL 磁力線と閉磁力線のリコネクション (T2)は零点 N の近くの β 上で起こる。したがってローブ磁力線と閉磁力線のリコネクションは $2^2 = 4$ 通りある。

8.1.5 まとめ

最後に全体をまとめる。2-零点, 2-セパレータの基本構造 (図 7.5 または図 7.6) を定常に保つリコネクションは全部で 16 通りある。そのうち半分が Dungey 型で, 残りの半分が交換型である。これまでの議論を整理すると表 8.1 のようになる。ここで注意しておきたいことは, 本節で考察したリコネクションにはプラズマ力学が全く含まれていないことである。7 章で導入した真空モデルにリコネクションを起こす拡散領域を任意に (勝手に) 加えただけである。拡散領域は「真空」ではないが, プラズマ過程が含まれていないという意味でこのリコネクションモデルも「真空モデル」と呼ぼう。

表 8.1 零点-セパレータの基本構造で起こるリコネクション

初出	リコネクション “方程式” *	場合 の数	固有名	拡散領域		型分類
Dungey (1961)	(D1) IMF + closed \rightarrow NL + SL	4		セパレータ (2 葉の Σ 面の交線)		Dungey 型
	(D2) NL + SL \rightarrow closed + IMF	4				
Russell (1973)	(R1) IMF + NL \rightarrow NL + IMF (R2) IMF + SL \rightarrow SL + IMF	4		円筒面	単 独 Σ 面	交換型
Tanaka (1999)	(T1) NL + closed \rightarrow closed + NL (T2) SL + closed \rightarrow closed + SL	4	交換リコネ クション	トーラ ス面		

* 略号は IMF (interplanetary magnetic field), NL (north lobe), SL (south lobe)。

8.2 磁束循環と電離圏対流セル

磁気圏前面におけるリコネクション(D1)と、磁気圏尾部におけるリコネクション(D2)を組み合わせると、いわゆる Dungey サイクル (Dungey, 1961) と呼ばれる磁束循環が形成されることはよく知られている。これに対応し、電離圏では 2 つの対流セルが現れる。電離圏対流は、磁気圏ダイナモが電離圏-磁気圏を結ぶ大電流系を駆動・維持し、電離圏プラズマがアンペール力によって動かされることにより起こる。電離圏対流は太陽風-磁気圏-電離圏とつながるエネルギーの流れを表す鏡と言える。このように、電離圏対流は力学過程により説明されるのが本来の姿である。しかし直観的な簡便法として、力学過程を無視し(真空モデルの導入, 8.1 節), リコネクションによる磁力線のトポロジー変化のみを電離圏に投影して電離圏の対流セル(すなわち磁気圏での磁束循環)を議論することがよく行われる。本書の最後に真空モデルによる電離圏対流を議論する。

8.1 節で考察した零点-セパレータ構造でのリコネクションにおいて、拡散領域が無限に薄い極限を考える。図 8.1 において拡散領域は文字通り線(すなわち X 線)になる。この X 線を電離圏に投影すると、stemline (図 8.1 では s_1) がある半球では stemline の根元から伸びる線分になり、逆半球では磁力線開閉境界(極冠境界 (polar cap boundary) とも言う)上の線分になる(複数の線分になる場合もある) (Watanabe et al., 2007)。この様子をまずよく知られている Dungey サイクルで見てみよう。図 8.8 は IMF $B_y < 0$ の場合に、夕側の Dungey サイクルを電離圏対流としてみたものである。図 8.8a の紫色の点線と、図 8.8b の水色の点線は、それぞれ図 7.5 における同色の Σ 面を表している。紫色が零点 N (B 型) の Σ 面で、水色が零点 M (A 型) の Σ 面である。零点 N から出る stemline s_3 の根元が、図 8.8b の緑色の点で表してある。黒色の太線は、電離圏に投影した X 線である。夕側における Dungey 型リコネクション ((D1)・(D2)とも) は南半球の零点 N の近くの拡散領域で起こる。昼側リコネクション(D1)の X 線は、南半球では点 s_3 から開閉境界に沿って昼側に伸びる線分になり、北半球では昼側にある開閉境界上の線分になる。(図 8.8 では投影された X 線を “D1” と表現している。以下同様に投影された X 線をリコネクション方程式の記号で表現する。) 同様に、夜側におけるリコネクション(D2)の X 線は、南半球では点 s_3 から開閉境界に沿って夜側に伸びる線分になり、北半球では夜側にある開閉境界上の線分になる。つなぎ換えを起こす磁力線の電離圏の根元は、リコネクションの瞬間、投影された X 線を通過する。図 8.8 の矢印はプラズマの流線で、ローブ領域の運動を南北とも青色で、閉領域の運動を赤色で示してある(図 8.1, 図 8.2, 図 8.3, 図 8.5, 図 8.7 の赤い磁力線, 青い磁力線とは無関係)。赤色の流線は、南北電離圏における磁気共役点の運動と考えてよい。流線は閉じた曲線になり、南北とも、1 サイクルの間に開閉境界を 2 回通過する。このような対流セルをマージングセル (merging cell) と呼ぶ (Reiff & Burch, 1985)。マージングセルは元々 Dungey サイクルを念頭において名付けられたが、Dungey サイクルが関与していない場合でも、1 サイクルで開閉境界を 2 回通過する対流セルを一般にマージングセルと呼ぶよ

うになってきている.したがって本書でもこの定義に従う.図 8.8 では夕側の Dungey サイクルしか描いてないが,同様の Dungey サイクルが朝側にもある.ただし零点 M の stemline s_1 が北半球に根元をもち,南北の差異が夕側と反転する.このように IMF B_y の効果は南北,朝夕で反対称的に現れるので,今後もそのように図を見てほしい.

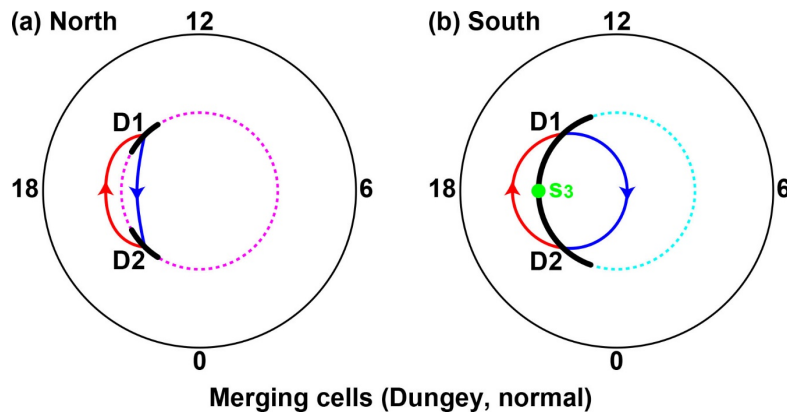


図 8.8 IMF $B_y < 0$ 時における夕側の Dungey サイクル.7 章の記述に対応させて,紫色点線は β 面の交線を,水色点線は α 面の交線を,緑色点は stemline の交点を表す.一方,赤矢印は閉領域の対流を,青矢印は開領域の対流を表す(図 8.1, 図 8.2, 図 8.3, 図 8.5, 図 8.7 の赤い磁力線,青い磁力線とは無関係).

IMF が強い北向きのときは,図 8.8 の対流とは逆向きに回る Dungey サイクルが存在する(Crooker, 1992; Watanabe et al., 2005, 2006).これを「逆 Dungey サイクル(reverse Dungey cycle)」と呼ぶ.これと対照させる場合には,図 8.8 を通常の Dungey サイクル(normal Dungey cycle)と呼ぶ.北半球が夏の場合の逆 Dungey サイクルを模式的に示したのが図 8.9 である.図の表現法や色の使い方は図 8.8 と同じである.また夕側の逆 Dungey サイクルしか示していない.朝側にも対称的な逆 Dungey サイクルがある.北半球が夏の場合,まず北半球の零点 M 近傍で IMF と閉磁場のリコネクション(D1)が起こる.この X 線の電離圏投影は(相対的に)夜側の開閉境界にある.図 8.9a の緑色の点 s_1 は零点 M (A 型)から出る stemline の根元である.(D1)で開いた磁力線は,今度は反対半球(南半球)の零点 N の近傍で閉じるリコネクション(D2)を起こす.この X 線の電離圏投影は(相対的に)昼側の開閉境界にある.図 8.9b の緑色の点 s_3 は零点 N (B 型)から出る stemline の根元である.対流セルは図 8.8 と同様に1サイクルで 2 回開閉境界を通過するが,回る向きが図 8.8 とは逆になっている.これを逆マーキングセル(reverse merging cell)と呼ぶ.図 8.9 は北半球が夏の場合であるが,北半球が冬の場合は南北のパターンが逆転する.すなわち,図 8.9a の s_1 は昼側に現れ,図 8.9b の s_3 は夜側に現れる.

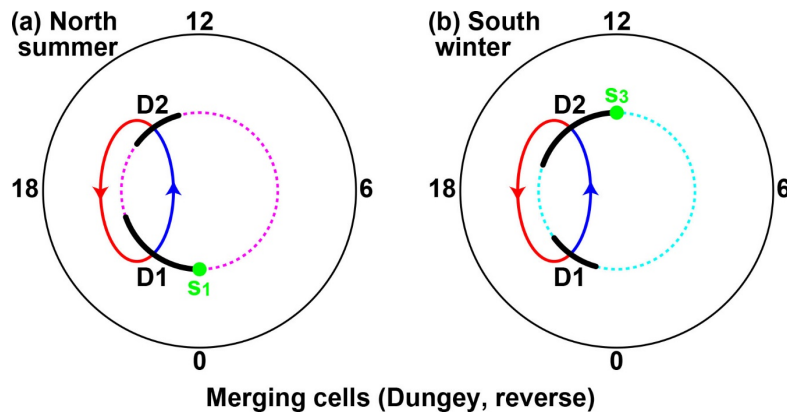


図 8.9 北半球が夏の場合の夕側逆 Dungey サイクル.

続いて Russell (1973) が提唱した, (R1) または (R2) のみで起こる磁束循環を考察しよう. 図 8.4 を用いて (R1) について説明する. 太陽風とともにやってきた IMF 力線 a-b が NL 磁力線 c-d とリコネクションを起こす (図 8.4a). その結果, 新たな NL 力線 a-d と IMF 力線 c-b ができる (図 8.4b). 前者は磁気圏前面を覆う状態 (以下 overdraped 状態と略す) になるが, 太陽風とともに後方へ流れるにしたがって overdraped 状態は解消される. そして再び図 8.4a の NL 磁力線 c-d になり, IMF とリコネクションを起こす.

図 8.10 は IMF $B_y < 0$ の場合に, 図 8.4 のリコネクション (R1) により形成される電離圏対流をみたものである. 図の表現法や色の使い方は図 8.8 や図 8.9 と同じである. リコネクション (R1) は朝側で起こり, stemline s_1 の根元は北半球の朝側にある. 図 8.10a に示すように, リコネクション (R1) の X 線を電離圏へ投影すると, s_1 から開領域に伸びる線分になる (Watanabe et al., 2005, 2007). 図 8.4 の点 d が図 8.10a の点 d に当たる. 図 8.10a の点 d から出発し, 青矢印に沿って再び点 d に戻ってくる電離圏プラズマの運動が, 図 8.4b の NL 磁力線 a-d が図 8.4a の NL 磁力線 c-d に推移し

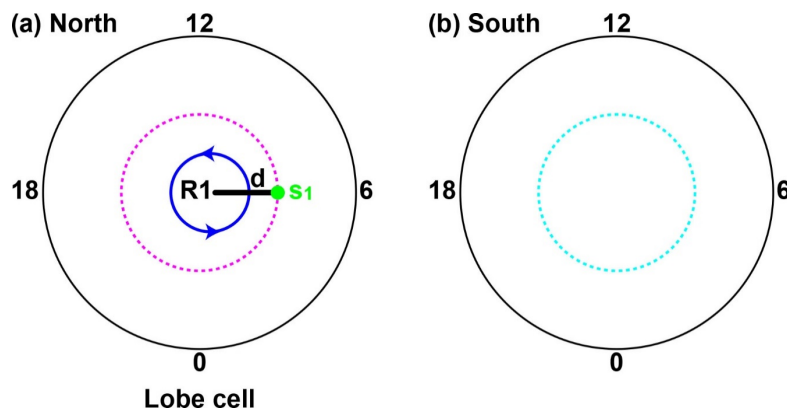


図 8.10 IMF $B_y < 0$ 時における北半球のローブサイクル.

ていく過程に相当する。図 8.10a のように開領域で閉じる対流セルは「ローブセル (lobe cell)」と呼ばれている (Reiff & Burch, 1985)。これにならい、ローブセルが表す磁束循環を「ローブサイクル」と呼ぼう。ローブサイクルは反対半球 (この場合南半球) には全く影響をおよぼさないことに注意しよう (図 8.10b)。

前世紀には (2000 年ごろまで), 電離圏対流は図 8.8 のマーキングセル, 図 8.10 のローブセル, そしてこれから紹介する粘性セルの組み合わせで説明されてきた。最後の粘性セルは太陽風と磁気圏の間で粘性的相互作用が起こり, 太陽風の流れが磁気圏低緯度境界層内のプラズマを「引きずる」ことにより生じる (Axford & Hines, 1961)。したがって, リコネクションによって現れる対流セルとは異質のものである。粘性セルに付随する磁束循環を「粘性サイクル」と呼ぼう。図 8.11 は粘性セルの電離圏投影を示したものである。粘性セルの回転方向は, 通常のマーキングセルの回転方向 (図 8.8) と同じであるが, 閉領域内のみに見えるという特徴をもっている。数値コードにもよるが, シミュレーションでも粘性セルと似た (図 8.11 のような) 対流が現れることがある。しかし磁気圏赤道面におけるプラズマの運動がそのまま電離圏に投影されるとは考えにくく, 「粘性セル」の実体は必ずしも明らかでない。2.2 節で述べたように, MHD シミュレーションの結果は粘性サイクルに対して否定的である。観測によると, 「粘性セル」によるポテンシャル降下は $\sim 10\text{kV}$ 程度であると見積もられ (Lu et al., 1994; Milan, 2004), IMF 南向き時におけるマーキングセルのポテンシャル降下と比べてかなり小さい。本章の目的はリコネクションによる対流を考察することでもあり, 今後粘性セル (粘性サイクル) は考慮しないことにする。

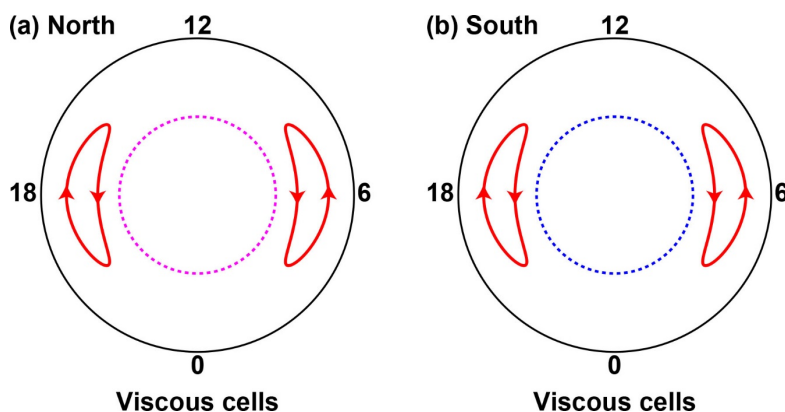


図 8.11 粘性サイクル。

前述のように, Dungey サイクル (マーキングセル), ローブサイクル (ローブセル), 粘性サイクル (粘性セル) の 3 つを組み合わせるのが伝統的な考え方であったが, 開磁力線と閉磁力線のリコネクションが提唱され (Tanaka, 1999), それ以外の磁束循環が存在することも明らかになってきた。次に, 北向き IMF 時に現れる「交換サイクル (interchange cycle)」 (Watanabe et al., 2005, 2006, 2010; Watanabe & Sofko, 2009a, 2009b) を紹介しよう。交換サイクルは (R1) と (T1) の繰り返し, または

8.4b の NL 磁力線 a-d が図 8.6a の NL 磁力線 e-f に移行する過程に対応する。図 12a の赤線 f-h, および図 8.12b の点 g から出て再び点 g に帰る赤線は, 図 8.6b の閉磁力線 g-f が図 8.6a の閉磁力線 g-h に移行する過程に対応する。図 8.12a の青線 h-d は, 図 8.6b の NL 磁力線 e-h が図 8.4a の NL 磁力線 c-d に移行する過程に対応する。

「Reciprocal」の意味について述べよう。ひとつは「互恵的な, 相互交換の」という意味である。リコネクション(R1)で生じた開磁束を次のリコネクション(T1)に渡し, 逆にリコネクション(T1)で生じた開磁束を次のリコネクション(R1)に渡している。このように開磁束の往復運動(reciprocation)を支える対流セルである。もう一つは「(幾何学でいう)反転の」という意味である。Reciprocal セルは交換サイクルでなくても, 理論上は開磁力線と閉磁力線のリコネクション((T1)または(T2))だけで形成され得る。例えば図 8.12a の R1 (すなわち図 8.4 の(R1)) はなくてよい。図 8.6b の NL 磁力線 e-h を図 8.6a の NL 磁力線 e-f に戻してやることが出来れば, 図 8.12b の reciprocal セルが生まれる(しかし現実には太陽風が図 8.6 の左から右に流れているので力学的に無理であるが)。この仮想的な, 図 8.6 の繰り返しにより閉領域内で閉じる対流セルができる状況は, 図 8.4 の繰り返しにより開領域内で閉じる対流セル(ローブセル)ができる状況と似ている。そして以前に議論したが, 写像(8.1)により(R1)を反転させると(T2)になり((R2)を反転させると(T1)になり), 逆に(T2)を反転させると(R1)になる((T1)を反転させると(R2)になる)。(無限遠点における北半球・南半球の区別は, 地球と同様に磁力線が出ていく方を南半球, 磁力線が入ってくる方を北半球としている。)例えば図 8.4 のリコネクション(R1)を無限遠点の視点で観察すると, 閉磁力線 a-b と SL 磁力線 c-d がつなぎ換わり, SL 磁力線 a-d と閉磁力線 c-b をつくるリコネクション(T2)である。このように, (R1)と(T2), (R2)と(T1)はお互いに反転(reciprocation)の関係にあり, ちょうど陰と陽の関係になっている。(R1)や(R2)を反転させたりリコネクションで出来る対流セル, というのが 2 つ目の意味である。以上述べた 2 つの意味は少し異なるものである。しかし英語ではどちらも「reciprocal」と表現されるのは, 日本語ではうまく表現できない「reciprocal」の概念が存在することを意味する。

前述のように, リコネクショントポロジーの同相性から, 開領域で閉じるローブセルと閉領域で閉じる reciprocal セルがお互いに反転の関係にあると予想される。これを詳しくみてみよう。例えば図 8.4 のリコネクション(R1)の繰り返しで起こる, 北半球のローブセルを考える。(R1)の反転は(T2)であり(図 8.6 の南北を逆転させたもの), 無限遠では(T2)の繰り返しによる((R2)を必要としない)交換サイクルが起きている。その結果, 無限遠の北半球では reciprocal セルが, 南半球ではマーキングセルが形成される。すなわち, 図 8.12 で南北を逆転させ, 図 8.12a の X 線(R1)(点 d を含む黒太線)を消去した対流パターンが無限遠では現れる。地球における北半球のローブセルを無限遠に投影すると南半球のマーキングセルの一部(開領域部分)になり, 地球近傍での(R1)に關与する IMF を無限遠に投影すると北半球の reciprocal セルと南半球のマーキングセルの一部(閉領域部分)になる。

これまで考察してきたように、リコネクションの組み合わせから磁束循環と電離圏の対流セルを得ることができる。これまでの議論を表 8.2 に整理するとともに、もう少し複雑な対流セルが存在し得ることを紹介して本章を終わろう。

表 8.2 リコネクションの組み合わせによる磁束循環

リコネクション(*)	組み合わせによる磁束循環	
(D1) IMF + closed \rightarrow NL + SL	Dungey サイクル (通常・逆転)	混成サイクル
(D2) NL + SL \rightarrow closed + IMF		
(T1/T2) lobe + closed \rightarrow closed + lobe	交換サイクル	ローブサイクル
(R1/R2) IMF + lobe \rightarrow lobe + IMF		

(*) 略号は IMF (interplanetary magnetic field), NL (north lobe), SL (south lobe)。

表 8.2 中, Dungey サイクル, ローブサイクル, 交換サイクルはすでに説明した。このほか, Dungey 型リコネクションと交換リコネクションを組み合わせた混成サイクル (hybrid cycle) というのがある (Watanabe et al., 2007; Watanabe & Sofko, 2009a, 2009c)。交換サイクルにおいては, まず IMF とローブのリコネクションで overdraped 状態のローブができた。IMF 北向き時には IMF と閉磁場のリコネクション(D1)でも overdraped 状態のローブができる。図 8.13 は $B_y < 0$ の場合の夕方側における混成サイクルの概要を示したものである。北向き IMF 1 と閉磁力線 2 が南半球でリコネクション

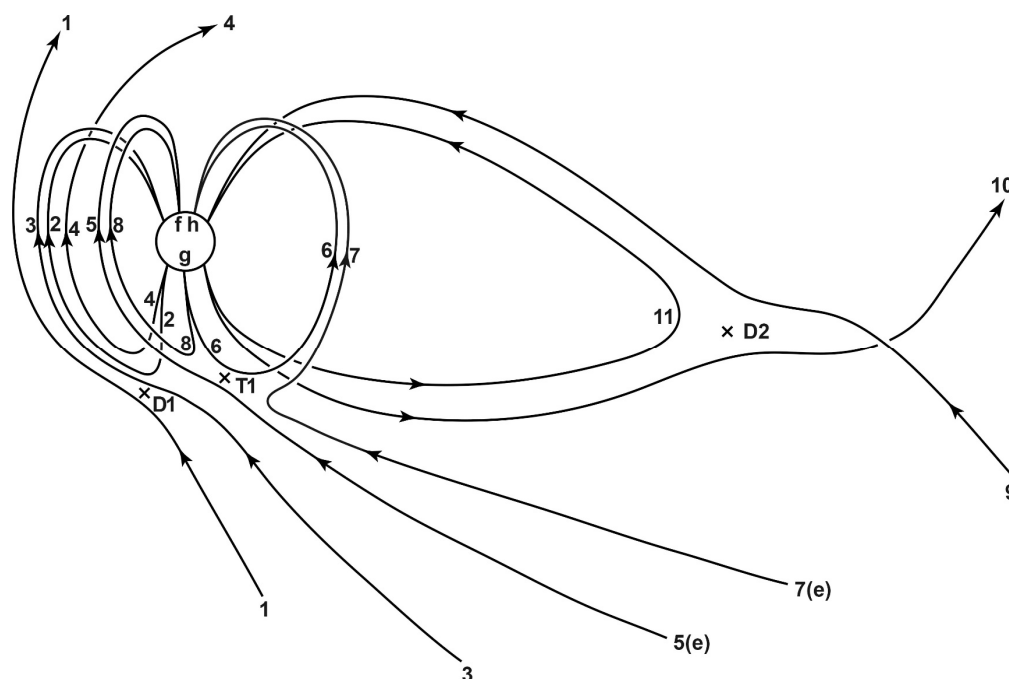


図 8.13 IMF $B_y < 0$ 時における夕方側混成サイクルを形成する磁力線群。

(D1)を起こし, NL 3 と SL 4 が出来る. SL 4 はそのまま尾部に運ばれて, やがて SL 10 になるのに対し, NL 3 は overdraped 状態になり, 磁気圏内にわずかに侵入しながら NL 5 となる. そして NL 5 と閉磁力線 6 が交換リコネクション(T1)を起こし, 新たに閉磁力線 8 と NL 7 が出来る. 図 8.6 と比較参照するため, 磁力線に図 8.6 と同じ記号 e, f, g, h をつけてある. ここで交換リコネクション(T1)は overdraped 状態を解消するという役割をもっている. Overdraped 状態の磁力線は磁気圏前面に引っかかり, 尾部にそのままでは運ばれない. Overdraped 状態が消えた NL 7 は尾部に運ばれてやがて NL 9 になる. そして尾部において NL 9 と SL 10 がリコネクション(D2)を起こす. その結果出来る閉磁力線 11 は磁気圏内部を昼間側に向かい, やがて閉磁力線 6 となり交換リコネクション(T1)に参加する. (T1)の結果新たに出来る閉磁力線 8 は更に昼間側に向かい, やがて閉磁力線 2 となり, 最初のリコネクション(D1)に参加する. こうして完成する磁束循環は Dungey サイクルに近いが, 途中で交換リコネクションが介在しているという特徴をもっている.

図 8.14 は図 8.13 の混成サイクルによる電離圏対流を示したものである. 図の表現法や色の使い方はこれまでと同じである. 図 8.13 と比較参照するため, 図 8.13 の対応する磁力線番号を入れてある. また, 図 8.6 の点 f, g, h に対応する点も示してある. 昼間側のリコネクション(D1)で出来る SL の根元は図 8.14b の 4→10 と進む. 一方 NL の根元は, 図 8.14a の 3→5 と進み, 交換リコネクション(T1)に参加する. その結果, NL e (図 8.6 参照) の根元は図 8.14a の 5 から 7 に跳ぶ. Overdraped 状態が解消された NL 7 は図 8.14a の 7→9 と進み, SL 10 とリコネクション(D2)を起こす. (D2)の結果作られる閉磁力線の根元は, 図 8.14a, b の 11→6 と進み, 交換リコネクション(T1)に参加する. その結果, 閉磁力線の北半球の根元は図 8.14a の 6 から 8 に跳ぶ. 南半球の根元 g (図 8.14b) は変わらない. (T1)の結果出来る閉磁力線の根元は, 図 8.14a, b の 8→2 と進み, 最初のリコネクション(D1)に参加する. 以上の結果として, 電離圏では図 8.14 の対流が現れる. 図 8.14 を図 8.8 と比較すると, 対流のパターンは似ていて, Dungey サイクルの途中に(T1)が挟まれているところが異なっ

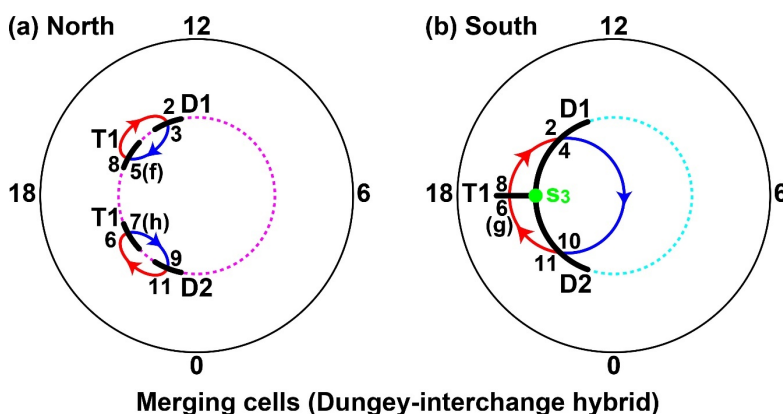


図 8.14 IMF $B_y < 0$ 時における夕側混成サイクル(その1)。

いる。このため、元々三日月型だった北半球の対流セルが 2 つに分裂した形になっている。Watanabe et al. (2004)は、昼間側のマージングセルを第一交換セル、夜側のマージングセルを第二交換セルと呼んだ。見かけ上、2 つの交換セルで開磁束と閉磁束を「交換」する形になっている。Dungey 型リコネクションで出来た開磁束を夜側へ運びたいのだが、overdraped 状態なのでそのままでは運べない。交換リコネクションを介して開磁束を第一交換セルから第二交換セルに渡し（開磁力線の根元が f から h に跳ぶ）、同時に閉磁束を第二交換セルから第一交換セルに引き受けている（閉磁力線の根元が h から f に跳ぶ）。このように、交換リコネクションは対流（frozen-in 輸送）に依らずに磁束を遠方に運ぶことができる。

図 8.14（すなわち図 8.13）の混成サイクルには、図 8.15a, b に示す亜種がある。図 8.14 との違いは、(D1)で出来た NL 磁力線 3 が朝側磁気圏を覆うため、その根元が朝側へ運動することである。その結果、北半球の電離圏では第一交換セルが朝側に現れる。図 8.15a では極冠が円形に描いてあるが、実際には第一交換セルの反太陽方向の対流は朝側プラズマシートに陥入する形になる。これをふまえて描いたものが図 8.15c で、結果として極冠が分岐し、シータオーロラと似たようなプラズマシートの孤立化が起こる (Watanabe et al., 2004)。もちろん、図 8.15c の構造は混成サイクル単独で形成されるものではなく、他の磁束循環との組合せで形成・維持される。昼間側には 4 層構造の沿磁力線電流が現れることが知られているが (Ohtani et al., 1995)、図 8.15c の対流系でうまく説明できる (Watanabe et al., 2009c)。

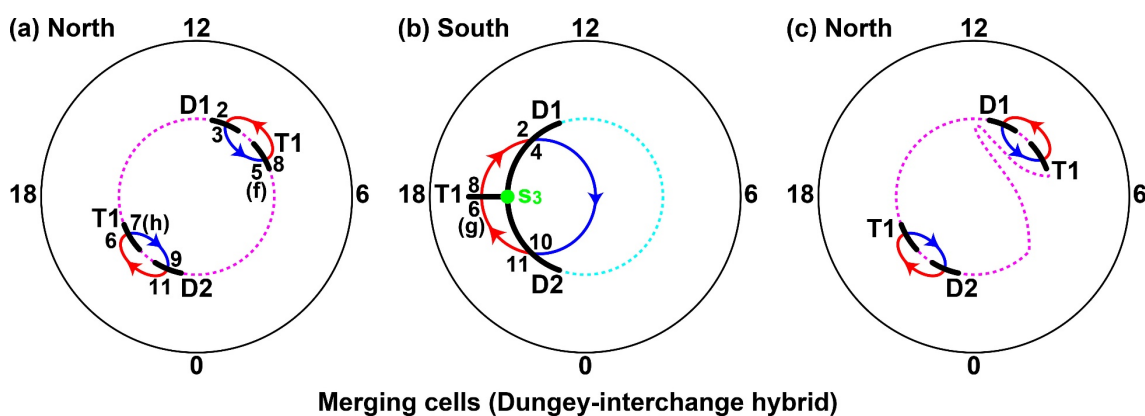


図 8.15 IMF $B_y < 0$ 時における夕側混成サイクル (その2)。

これまでリコネクションによる様々な磁束循環をみてきた。伝統的な考え (Reiff & Burch, 1985) では Dungey サイクルとローブサイクルしかないが、交換リコネクションを導入するだけでかなり変化に富むことがわかる。交換リコネクションは対流（frozen-in 輸送）に依らずに磁束を遠方に運ぶことができる。この特異な性質は、IMF 北向き時の複雑な現象に関与している可能性がある。例えば、図 8.15c のように分岐した極冠構造を考えよう（混成サイクルからは離れて極冠構造のみに注目する）。この極冠構造からいわゆるシータオーロラを作るには、開磁束を朝側の極冠に入れて、プラス

マシートの突出部分を 12 時-0 時の位置までもってこなければならない。伝統的に考えられてきたシナリオは、(1)リコネクション(D1)で新たな開磁束を作り朝側極冠に入れる (Newell & Meng, 1995),あるいは(2)リコネクション(R1)を介して夕側極冠の開磁束を対流で朝側極冠に移す (Milan et al., 2005),である。(1)はあり得そうだが,(2)は 12 時近傍の極冠の狭い「隙間」(図 8.15c 参照)を対流が通過しなければならないので現実性に問題がある。ところで、交換リコネクションを考えると、夕側極冠の開磁束を難なく朝側極冠に移すことができる (Watanabe & Sofko, 2009a)。対流を伴わない磁束輸送なので、12 時近傍の「隙間」がなくても(シータの横棒が昼間側のオーロラオーバルに接触していても)この輸送は可能である。このように、交換リコネクションは複雑な磁気圏現象の背後で暗躍している可能性がある。

本章では、基本トポロジー構造に任意の拡散領域を与えた「真空モデル」を用いて電離圏対流を議論した。そのご利益は直観的理解が容易なことである。しかしプラズマ力学が全く考慮されていないことは注意を要する。実際、Watanabe et al. (2018)は図 8.12 で説明した交換サイクルをシミュレーションで再現したものの、その力学過程は真空モデルとかなり異なっていた。結果として現れる電離圏対流パターンは間違っていないとしても、その駆動機構は単純に拡散領域の投影で説明されるようなものではない。真の理解のためには磁場トポロジーとプラズマ力学を両輪として研究を進めなければならない。

第 2 部の引用文献

- Abraham, F. D., Abraham, R. H., & Shaw, C. D. (1990). A visual introduction to dynamical systems theory for psychology. Aerial Press, Santa Cruz. ISBN-13: 978-0942344097.
- Abraham, R. H., & Shaw, C. D. (1983). Dynamics: The geometry of behavior. Part 2: Chaotic Behavior. Aerial Press, Santa Cruz. ISBN-13: 978-0942344028.
- Abraham, R. H., & Shaw, C. D. (1985). Dynamics: The geometry of behavior. Part 3: Global Behavior. Aerial Press, Santa Cruz. ISBN-13: 978-0942344035.
- Arnold, V. I. (1992). Ordinary Differential Equation. Springer, Berlin. ISBN-13: 978-3540345633.
- Axford, W. I., & Hines, C. O. (1961). A unifying theory of high-latitude geophysical phenomena and geomagnetic storms. Canadian Journal of Physics, 39, 1433–1464. <https://doi.org/10.1139/p61-172>.
- Cai, D. S., Nishikawa, K., & Lembege, B. (2006). Magnetotail field topology in a three-dimensional global particle simulation. Plasma Physics and Controlled Fusion, 48, B123–B135. <https://doi.org/10.1088/0741-3335/48/12B/S13>.
- Cowley, S. W. H. (1973). A qualitative study of the reconnection between the Earth's magnetic field and an interplanetary field of arbitrary orientation. Radio Science, 8(11), 903–911. <https://doi.org/10.1029/RS008i011p00903>.
- Crooker, N. U. (1992). Reverse convection. Journal of Geophysical Research, 97(A12), 19,363–19,372. <https://doi.org/10.1029/92JA01532>.
- Crooker, N. U., Gosling, J. T., & Kahler, S. W. (2002). Reducing heliospheric magnetic flux from coronal mass ejections without disconnection. Journal of Geophysical Research, 107(A2), 1028. <https://doi.org/10.1029/2001JA000236>.
- Cumnock, J. A., Sharber, J. R., Heelis, R. A., Hairston, M. R., & Craven, J. D. (1997). Evolution of the global aurora during positive IMF B_z and varying IMF B_y conditions. Journal of Geophysical Research, 102(A8), 17,489–17,497. <https://doi.org/10.1029/97JA01182>.
- Dungey, J. W. (1961). Interplanetary magnetic field and auroral zones. Physical Review Letters, 6(2), 47–48. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.6.47>.
- Dungey, J. W. (1963). The structure of the exosphere or adventures in velocity space. In C. DeWitt, J. Hieblot, & L. LeBeau (Eds.), Geophysics, The Earth's Environment (pp. 503–550). Gordon and Breach, New York.
- Greene, J. M. (1988). Geometrical properties of three-dimensional reconnecting magnetic fields with nulls. Journal of Geophysical Research, 93(A8), 8583–8590. <https://doi.org/10.1029/JA093iA08p08583>.
- Hesse, M., & Schindler, K. (1988). A theoretical foundation of general magnetic reconnection. Journal of Geophysical Research, 93(A6), 5559–5567. <https://doi.org/10.1029/JA093iA06p05559>.
- Lau, Y.-T., & Finn, J. M. (1990). Three-dimensional kinematic reconnection in the presence of field nulls and closed field lines. The Astrophysical Journal, 350, 672–691. <https://doi.org/10.1086/168419>.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. Journal of the Atmospheric Sciences, 20(2), 130–141. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2).
- Lu, G., Richmond, A. D., Emery, B. A., Reiff, P. H., de la Beaujardiere, O., Rich, F. J., Denig, W. F., Kroehl, H. W., Lyons, L. R., Ruohoniemi, J. M., Friis-Christensen, E., Opgenoorth, H., Persson,

- M. A. L., Lepping, R. P., Rodger, A. S., Hughes, T., McEwin, A., Dennis, S., Morris, R., Burns, G., & Tomlinson, L. (2004). Interhemispheric asymmetry of the high-latitude ionospheric convection pattern. *Journal of Geophysical Research*, 99(A4), 6419–6510. <https://doi.org/10.1029/93JA03441>.
- Merkin, V. G., & Crooker, N. U. (2008). Solar concept of flux transport by interchange reconnection applied to the magnetosphere. *Journal of Geophysical Research*, 113, A00B04. <https://doi.org/10.1029/2008JA013140>.
- Milan, S. E. (2004). Dayside and nightside contributions to the cross polar cap potential: Placing an upper limit on a viscous-like interaction. *Annales Geophysicae*, 22, 3771–3777. <https://doi.org/10.5194/angeo-22-3771-2004>.
- Milan, S. E., Hubert, B., & Grocott, A. (2005). Formation and motion of a transpolar arc in response to dayside and nightside reconnection. *Journal of Geophysical Research*, 110, A01212. <https://doi.org/10.1029/2004JA010835>.
- Newell, P. T., & Meng, C.-I. (1995). Creation of theta-auroras: The isolation of plasma sheet fragments in the polar cap. *Science*, 270, 1338–1341. <https://doi.org/10.1126/science.270.5240.1338>.
- Ohtani, S.-I., Potemra, T. A., Newell, P. T., Zanetti, L. J., Iijima, T., Watanabe, M., Blomberg, L. G., Elphinstone, R. D., Murphree, J. S., Yamauchi, M., & Woch, J. G. (1995). Four large-scale field-aligned current systems in the dayside high-latitude region. *Journal of Geophysical Research*, 100, 137–153. <https://doi.org/10.1029/94JA01744>.
- Parnell, C. E., Smith, J. M., Neukirch, T., & Priest, E. R. (1996). The structure of three-dimensional magnetic neutral points. *Physics of Plasmas*, 3(3), 759–770. <https://doi.org/10.1063/1.871810>.
- Priest, E. E., Lonie, D. P., & Titov, V. S. (1996). Bifurcations of magnetic topology by the creation or annihilation of null points. *Journal of Plasma Physics*, 56(part 3), 507–530. <https://doi.org/10.1017/S0022377800019449>.
- Priest, E. R., & Titov, V. S. (1996). Magnetic reconnection at three-dimensional null points. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 354(1721), 2951–2992. <https://doi.org/10.1098/rsta.1996.0136>.
- Reiff, P. H. & Burch, J. L. (1985). IMF B_y -dependent plasma flow and Birkeland currents in the dayside magnetosphere: 2. A global model for northward and southward IMF. *Journal of Geophysical Research*, 90(A2), 1595–1609. <https://doi.org/10.1029/JA090iA02p01595>.
- Russell, C. T. (1972). The configuration of the magnetosphere. In E. R. Dyer (Ed.), *Critical Problems of Magnetospheric Physics* (pp. 1–16). Inter-Union Commission on Solar-Terrestrial Physics Secretariat, National Academy of Sciences, Washington, D. C.
- Schindler, K., Hesse, M., & Birn, J. (1988). General magnetic reconnection, parallel electric fields, and Helicity. *Journal of Geophysical Research*, 93(A6), 5547–5557. <https://doi.org/10.1029/JA093iA06p05547>.
- Siscoe, G. L., Erickson, G. M., Sonnerup, B. U. Ö., Maynard, N. C., Siebert, K. D., Weimer, D. R., & White, W. W. (2001a). Global role of E_{\parallel} in magnetopause reconnection: An explicit demonstration. *Journal of Geophysical Research*, 106(A7), 13,015–13,022. <https://doi.org/10.1029/2000JA000062>.
- Siscoe, G. L., Erickson, G. M., Sonnerup, B. U. Ö., Maynard, N. C., Siebert, K. D., Weimer, D. R., & White, W. W. (2001b). Magnetospheric sash dependence on IMF direction. *Geophysical Research Letters*, 28(10), 1921–1924. <https://doi.org/10.1029/2000GL003784>.

- Tanaka, T. (1999), Configuration of the magnetosphere-ionosphere convection system under northward IMF conditions with nonzero IMF B_y . *Journal of Geophysical Research*, 104(A7), 14,683– 14,690. <https://doi.org/10.1029/1999JA900077>.
- Tanaka, T., Ebihara, Y., Watanabe, M., Den, M., Fujita, S., Kikuchi, T., Hashimoto, K. K., & Kataoka, R. (2019). Development of magnetic topology during the growth phase of the substorm inducing the onset of the near-Earth neutral line. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 124, 5158–5183. <https://doi.org/10.1029/2018JA026386>.
- Tanaka, T., Obara, T., Watanabe, M., Fujita, S., Ebihara, Y., Kataoka, R., & Den, M. (2018). Cooperatives roles of dynamics and topology in generating the magnetosphere-ionosphere disturbances: Case of the theta aurora. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 123, 9991–10,008. <https://doi.org/10.1029/2018JA025514>.
- Watanabe, M., Fujita, S., Tanaka, T., Kubota, Y., Shinagawa, H., & Murata, K. T. (2018). A magnetohydrodynamic modeling of the interchange cycle for oblique northward interplanetary magnetic field. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 123, 272–286. <https://doi.org/10.1002/2017JA024468>.
- Watanabe, M., Kabin, K., Sofko, G. J., Rankin, R., Gombosi, T. I., Ridley, A. J., & Clauer, C. R. (2005). Internal reconnection for northward interplanetary magnetic field. *Journal of Geophysical Research*, 110, A06210. <https://doi.org/10.1029/2004JA010832>.
- Watanabe, M., & Sofko, G. J. (2008). Synthesis of various ionospheric convection patterns for IMF B_y -dominated periods: Split crescent cells, exchange cells, and theta aurora formation. *Journal of Geophysical Research*, 113, A09218. <https://doi.org/10.1029/2007JA012868>.
- Watanabe, M., & Sofko, G. J. (2009a), Role of interchange reconnection in convection at small interplanetary magnetic field clock angles and in transpolar arc motion. *Journal of Geophysical Research*, 114, A01209. <https://doi.org/10.1029/2008JA013426>.
- Watanabe, M., & Sofko, G. J. (2009b). The interchange cycle: A fundamental mode of magnetic flux circulation for northward interplanetary magnetic field. *Geophysical Research Letters*, 36, L03107. <https://doi.org/10.1029/2008GL036682>.
- Watanabe, M., & Sofko, G. J. (2009c). Dayside four-sheet field-aligned current system during IMF B_y -dominated periods. *Journal of Geophysical Research*, 114, A03208. <https://doi.org/10.1029/2008JA013815>.
- Watanabe, M., Sofko, G. J., André, D. A., Ruohoniemi, J. M., Hairston, M. R., & Kabin, K. (2006). Ionospheric signatures of internal reconnection for northward interplanetary magnetic field: Observation of “reciprocal cells” and magnetosheath ion precipitation. *Journal of Geophysical Research*, 111, A06201. <https://doi.org/10.1029/2005JA011446>.
- Watanabe, M., Sofko, G. J., André, D. A., Tanaka, T., & Hairston, M. R. (2004). Polar cap bifurcation during steady-state northward interplanetary magnetic field with $|B_y| \sim B_z$. *Journal of Geophysical Research*, 109, A01215. <https://doi.org/10.1029/2003JA009944>.
- Watanabe, M., Sofko, G. J., Kabin, K., Rankin, R., Ridley, A. J., Clauer, C. R., & Gombosi, T. I. (2007). Origin of the interhemispheric potential mismatch of merging cells for interplanetary magnetic field B_y -dominated periods. *Journal of Geophysical Research*, 112, A10205. <https://doi.org/10.1029/2006JA012179>.
- Watanabe, M., Sofko, G. J., Yan, X., McWilliams, K. A., St.-Maurice, J.-P., Koustov, A. V., Hussey, G. C., & Hairston, M. R. (2010). Ionospheric convection signatures of the interchange cycle at

small interplanetary magnetic field clock angles. *Journal of Geophysical Research*, 115, A12230.
<https://doi.org/10.1029/2009JA015041>.

Yeh, T. (1976). Day side reconnection between a dipolar geomagnetic field and a uniform interplanetary field. *Journal of Geophysical Research*, 81(13), 2140-2144.
<https://doi.org/10.1029/JA081i013p02140>.

著者略歴

渡辺正和

1995 年東京大学大学院理学系研究科地球惑星物理学専攻博士課程修了。その後、国立極地研究所研究員（2001 年まで）、サスカチュワン大学物理及び物理工学科研究員（2010 年まで）を経て、現在九州大学大学院理学研究院地球惑星科学部門准教授。国立極地研究所、サスカチュワン大学では国際大型短波レーダ網（Super Dual Auroral Radar Network, SuperDARN）プロジェクトに従事し、主にデータ解析を担当。九州大学に移ってからはグローバル磁気流体シミュレーションを主軸に展開している。

極地研電子ライブラリー

National Institute of Polar Research Electronic Library

オーロラ物理学シリーズ④

磁気圏ダイナモと磁気圏磁場トポロジー

令和2年12月1日 発行

著 者 渡辺正和

編 集 片岡龍峰

発行所 大学共同利用機関法人 情報・システム研究機構 国立極地研究所

〒190-8518 東京都立川市緑町10-3

©2020 National Institute of Polar Research